TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

AD. MEYER, OTTO GALLANDER,
J. S. HEDSTRÖM, G. STARCK

TREDJE ÅRGÅNGEN

1919—1920

STOCKHOLM. ALBERT BONNIERS FÖRLAG

STOCKHOLM. ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1919—1920

Tredje årgångens innehåll.

I. Uppsatser.

Sid.

ALMQVIST, GUSTAV. Nyare teorier om den kemiska affinitetens natur III 97
AURELL BENGT. Om äldre och nya kosmogonier 159
BECKMAN, BENGT. Mätning av låga temperaturer 43
BLIX, KARL Om tals delbarhet 65
— — Elementär metod för bestämning av en algebraisk funktions maxima och minima 9
BLOM, C. E. Om behandlingen av de elektromagnetiska lagarna inom elementarfysiken 19
GALLANDER, OTTO. Om modern framställning av Ohms lag 82
— — Är vikt ett mass- eller kraftbegrepp? 172
HEDSTRÖM, J. S. Om geometriundervisningen i Realskolans fjärde klass 193
HEDVALL, ARVID. Grunddragen av teorien för alkalimetrisk och acidimetrisk titrering 222
HOLM, RAGNAR. Om elektricitetsström genom gaser och genom vakuum 88
— — Glödelektriska förstärkningsrör 204
JOSEPHSON, OLOF. Algebraisk metod vid den tidigare geometriundervisningen 129
LINDBORG, GUSTAF. Om koordinattransformation vid den allmänna andragradsekvationen i planet 136
— — Härledning av tangentteoremet och de Mollweideska formlerna ... 201
LINDHAGEN, ARVID. Något om den pytagoreiska ekvationen 1
— — Härledning av tangentteoremet 5
LÖNNQVIST, CONRAD. Om möjligheten av en kall kärna i jordens inre 141
MEYER, AD. Är Ohmska lagen en experimentell eller rationell lag? 70
OHLON, SV. E. Om arbetsbegreppet vid fysikundervisningen 40
RUNQVIST, KJ. Ett delbarhetskriterium 15

II. Meddelanden, recensioner, uppgifter m. m.

Meddelanden:

1) Ett sätt att bestämma temperaturen på vattnet vid dess största täthet (Otto Gallander) 58

2) Tvållösning för ytspänningsförsök (E. Friman) 180
3) Anmärkning till försök med Galileis ränna (Edv. Björnsson)..... 119
4) Anmärkning till artikeln »Om linsformeln och dess härledning» (årg. 1, sid. 230) (G. Forsström, C. E. Blom) 237
5) En svensk minnesvers för talet π (Gustaf Lindborg) 179

Bokanmälningar:
1) Hjelmslev, I. J. Geometriske Experimenter (M—r) 51
2) Moll, Tom. Astronomiska observationer i sjätte klassen och första ringen (M—r) 52
3) Ekman, V. W. Mekanik (O. J—n) 54
4) Hofmann, K. A. Lehrbuch d. anorganischen Experimentalchemie (J. A. Hedvall)..... 174

Matematiska och Fysikaliska uppgifter 60, 121, 180, 244
Lösningar till Matematiska och Fysikaliska uppgifter... 60, 122, 181, 245
Rättelse till lösningen av problem 54 (M. Lemoine) 252
Prisuppgift för 1919—20 64
Bedömning av inkomna lösningar till prisuppgiften 244
Frågor och svar 59, 120, 253
Angående höstterminens studentskrivningar (S. B—n, M—r, E. Solander, M—r) 118, 176, 240
Angående vårterminens fysiska studentskrivningar 243
Meddelande från Redaktionen 192

Om Geometriundervisning paa Grundlag af Erfaringen.

Af Professor T. BONNESEN, København.

Med stor Interesse har jeg læst *Rektor J. S. Hedströms* Afhandling »Om geometriundervisningen i realskolans 4:e klass», hvori der fremsættes Forslag til en Reform af den elementære Geometriundervisning; thi de Tanker, som ligger til Grund for dette Forslag, er i saa nøje Overensstemmelse med de Principer, hvorefter jeg selv har arbejdet i Danmark siden 1904, at det glæder mig at se en tilsvarende Bevægelse begynde i Sverrig. Da Redaktionen har ønsket Indlæg i dette vigtige Spørgsmaal, tør jeg maaske tage mig den Frihed at yde mit Bidrag til Diskussionen, endskønt jeg som dansk ikke har nogen Adkomst til at indvirke paa den svenske Undervisning.

I Danmark gives der ikke et saadant forberedende Kursus som i den svenske Realskoles 3dje Klasse, og som jeg antager er af en lignende Natur som det tyske propædeutiske Kursus, der væsentlig bestaar i Tegning af visse geometriske Figurer og Indførelse af tilsvarende Benævnelser. Men jeg anser heller ikke et saadant Kursus for nødvendigt eller af megen Betydning. Naar Undervisningen som hos os begynder i 12-Aars Alderen (2. Mellemskoleklasse) kan man meget vel straks anlægge en matematisk Metode, naar det gøres med den nødvendige Forstaaelse af de Tanker, som det ny Stof sætter i Bevægelse hos Begynderen. Men dertil kræves, at Læreren er meget lydhør overfor de til en Begyndelse naive og ubehjælpsomme Forslag, som Børnene fremkommer med. Læreren maa derfor baade tænke Stoffet meget omhyggeligt igennem

i Forvejen, og i Klassen lægge sine Spørgsmaal saaledes til Rette og være saa lidt pedantisk overfor de Svar, som Børnene giver, at han virkelig faar Besked om disses Tanker og er i Stand til at forstaa dem selv. Naar saa mange Lærere fra deres Ungdom og Aarene igennem staar famlende overfor den første Undervisning i Geometri og anser det for meget svært at lægge den til Rette, turde det ligge i, at den Metode de anvender udelukker dem fra at komme til Forstaaelse af hvad der rører sig i Eleverne, forstaa at disse kan tænke udmærket, selv om de udtrykker sig mindre godt, og selv om det aandelige Arbejde foregaar paa en noget anden Maade hos Børnene end i Lærerens trænede Hjerne.

Den Vej, som Børnene maa gaa for at komme til Forstaaelse af Geometrien er ganske den samme som den, ad hvilken Geometrien er skabt, nemlig Erfaringens. Saa længe Læreren ikke har Øje herfor, famler han i Blinde og fører Eleven henad den Vej, han selv er vant til at gaa; men Eleverne maa have Tid til at se sig om til alle Sider, og spærrer man dem Udsigten, kommer de ogsaa til at gaa i Blinde.

I Nyt Tidsskr. for Mat. A. 1906 har jeg fremsat nogle »Geometrisk-pædagogiske Betragtninger», hvori disse Tanker er tilspidsede i følgende Thesis: Hvilket Maal man end sætter Geometriundervisningen, hvad enten denne kun har praktisk Anvendelse for Øje, eller den ønsker at være et Led i Hjærnens Opdragelse, maa den geometriske Anskuelse, den geometriske Erfaring lære Eleverne Geometriens Sætninger at kende saaledes, at de forstaar, at det er virkelige, fysisk paaviselige Sandheder, Sætningerne udsiger.

Jeg skal nu give nogle Antydninger af, hvorledes Undervisningen kan lægges til Rette ud fra dette Synspunkt. Hver Elev maa have et Hefte med *kvadreret* Papir. Den rette Linie, Kvadratet og Rektanglet er dermed givet dem som det Erfaringsgrundlag, hvorpaa Geometrien i første Linie bygges op. Begrebet ret Vinkel kan nu fast-

slaas, og det er en Kendsgerning, at der eksisterer Firkanter med fire rette Vinkler, hvilket er tilstrækkeligt til senere at bevise, at Trekantens Vinkelsum er 2R. Man lader Eleverne med Trekanten tegne et Rektangel i en anden Stilling, det vil sige tegne en Firkant med tre rette Vinkler og prøve om den fjerde af sig selv bliver ret. Da dette ikke bliver Tilfældet hos adskillige, maa det overvejes om Skylden ligger hos Firkanten eller hos Tegneren, hvad denne i Almindelighed paa Forhaand har den rette Mening om; og han maa da nøje efterprøve de tre af ham afsatte Vinkler og finde Fejlen. Tegnepapiret viser Eksistensen af parallele Linier med nogle af disses Egenskaber (konstant Afstand, fælles Vinkelrette); senere vises disse Egenskabers indbyrdes Afhængighed. Endvidere kan Rektanglets Areal maales med Bogens Enhed og derfor ogsaa med andre Enheder, og man gaar da let over til Trekantens Areal. Papirets Inddeling giver let Adgang til at tegne Parallelogrammer, at konstatere disses Egenskaber og maale Arealet. Parallelogrammet, som spiller saa stor en Rolle i den elementære Geometri, er for Begynderen en ret fremmedartet Figur. Spørger man Klassen om, hvor man i Virkeligheden træffer saadanne Figurer, er den i Begyndelsen ret tvivlraadig; og man faar først lidt efter lidt saadanne Svar som »et Tag paa et Hus» eller Fliser paa Gaden (d. v. s. paa den anden Side af Gaden); med andre Ord Eleverne kender kun Parallelogrammet som perspektivisk Billede af Rektanglet. Af virkelige Parallelogrammer nævner Eleverne til sidst saadanne Ting som Salmiakpastiller og visse Kager. At Væggene paa en Trappeopgang er Parallelogrammer er dem ikke klart. Man kan nu som en Øvelse lade Børnene tænke sig, at de er Malerlærlinge, og lade dem opmaale Vægfladen paa Trappegangen.

Vinkelbegrebet maa indøves meget omhyggeligt. Det er ikke tilstrækkeligt at indføre Vinklen som en Del af en hel Omdrejning, men Eleverne maa betragte selve den geometriske Vinkelfigur for sig, idet den udklippes af Pa-

piret og sammenlignes med andre Vinkler. Man lader f. Eks. hver Elev tegne sin Trekant, udklippe de tre Vinkler og lægge dem ved Siden af hinanden. Naar Klassen saaledes har faaet Syn for, at alle disse forskellige Trekanter har den samme Vinkelsum, da naar man først til en virkelig Forstaaelse af Sætningens Indhold. Det er nyttigt paa samme Maade at konstatere at Summen af forskellige Polygoners Nabovinkler er 4R. At disse Vinkler saaledes »passer helt rundt» er en forbausende Oplevelse for Børnene. Naar Sætningen om Trekantens Vinkelsum paa denne Maade er kommet for Dagen, er Tiden inde til at spørge, om dette er noget, man kunde tænke sig til paa Forhaand. Man tager da fat paa det ovenfor antydede Bevis; Vinkelsummen i Rektanglet er 4R. Rektanglet deles af Diagonalen i ens Trekanter med Vinkelsummen 2R, og endelig kan enhver Trekant ved en Højde deles i retvinklede Trekanter. Og man kan nu ogsaa gøre Eleverne begribeligt, hvad der er Kærnen i dette Bevis: Ved den ene Fremgangsmaade var det nødvendigt at konstatere Sætningens Rigtighed ved en Mængde forskellige Trekanter, hvorefter man gaar ud fra, at den ogsaa gælder for andre Trekanter. Ved den anden Fremgangsmaade gaar man ud fra det Faktum, at det er muligt at konstruere Firkanter med 4 rette Vinkler, og der ud fra slutter man sig til Sætningen. Man har altsaa reduceret Antallet af nødvendige Erfaringer.

Den ovennævnte Fremgangsmaade bør ogsaa anvendes paa Sætningen om Periferivinkler og Centervinkel paa samme Bue.

Den eksperimentelle Metodes Betydning ligger imidlertid ikke blot i, at den bringer Eleverne til att forstaa Indholdet af de matematiske Sætninger, men det er ogsaa den eneste Vej, ad hvilken Begynderen — og for Resten ogsaa i mange Tilfælde den producerende Matematiker — naar til Overbevisning om Sætningernes Rigtighed. Der er nemlig en psykologisk Forskel imellem at forstaa et Bevis og at naa til Overbevisning. Det matematiske Bevis

beror paa en Række Slutninger ud fra et mindre eller større Antal tidligere fastslaaede Sætninger. Eleven kan meget vel følge de enkelte Slutninger og forstaa deres Rigtighed, men deraf følger ingenlunde, at han naar til Forstaaelse af, hvad det endelige Resultat indeholder, endsige er overbevist om dets Rigtighed. Den egentlige Forstaaelse og Overbevisning naas kun ad Erfaringens Vej. Naar Erfaring og Ræsonnement fremføres Side om Side, belyser de to Metoder gensidig hinanden, og først da bliver der Tale om egentlig Forstaaelse. Og jo mere kompliceret den matematiske Lærebygning bliver ved den fremadskridende Undervisning, desto nødvendigere er det at have dette i Erindring.

Jeg skal senere oplyse dette ved et Par Eksempler, men vil først gøre endnu et Par Bemærkninger om Trekantens Vinkelsum. I nogle Lærebøger bevises, at Summen af en Polygons Nabovinkler er 4R. paa den Maade, at man tænker sig en ret Linie drejet efterhaanden om Polygonens Vinkelspidser gennem de paa hinanden følgende Nabovinkler, idet den har en bestemt Polygonside til Begyndelses- og Slutningsstilling. Da Linien baade er blevet drejet gennem alle Polygonvinklerne og en hel Omdrejning, slutter man, at Sætningen er bevist. Dette Bevis er lige forkasteligt paa Grund af dets falske Ræsonnement og dets falske Anskuelighed. Ræsonnementet er falsk, fordi man gaar ud fra, at naar en Linie er drejet gennem to Vinkler om to forskellige Punkter, er den drejet en Vinkel lig med Summen af de to; thi det er netop denne Sætning, som skal bevises (Trekantens Vinkelsum); og dernæst fordi man gaar ud fra at Linien er drejet en hel Omdrejning, naar den er kommet tilbage til sin Udgangsstilling, og oven i Købet er blevet forskudt. Anskueligheden er falsk, da man intet vilde opnaa ved virkelig at dreje en Linie paa den angivne Maade; man opnaar ikke ad denne Vej nogen Erfaring om Vinkelsummen.

Matematisk uangribeligt er det derimod, naar man fører Beviset for Trekantens Vinkelsum ad euklidisk Vej,

idet man gaar ud fra et Parallelpostulat f. Eks. i den Form, at der igennem et Punkt udenfor en Linie kun kan tegnes een Linie, der ikke skærer den givne. Men fra et pædagogisk Synspunkt er dette Bevis kun af liden Værdi. Thi Postulatet, som ligger til Grund derfor, er udenfor Erfaringen; man kan ikke ved noget Eksperiment godtgøre dets Rigtighed for Eleverne. Resultatet er altsaa, at Erfaringen om Rektanglets Eksistens er det pædagogisk naturlige og matematisk uangribelige Udgangspunkt for Undersøgelsen.

Læren om Kongruens grundlægges naturligt ved Hjælp af det gennemsigtige Kalkerpapir. Men til Forstaaelsen af Kongruenssætningerne kræves noget mere. Eks. Man lader samtlige Elever tegne en $\triangle ABC$ og derpaa konstruere en ny $\triangle A_1B_1C_1$ saaledes, at $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A$, $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = AC$. De tre andre Stykkers Ligestorhed konstateres derefter ved Maaling. Herved opnaas først Forstaaelse af »det givne». At denne Fremgangsmaade som jeg har anvendt i min »Geometri for Mellemskolen» (København 1904) ikke falder alle Lærere naturlig, har jeg haft Vidnesbyrd om gennem følgende Udtalelse fra en Lærer: »Dersom jeg paa Klassetavlen udfører Konstruktionen, bliver Stykkerne i Trekanterne ikke ligestore, og derfor maa Eleverne tvivle om Sætningens Rigtighed. Men naar jeg derimod som sædvanlig siger, at dersom jeg tænkte mig den ene Trekant flyttet saaledes, at de Stykker, som er givet ligestore, bringes till Dækning, vil Trekanterne dække hinanden, saa kan alle forstaa, at saadan *maa* det være.» Man faar herved et pinligt Indtryk af, at det skulde være muligt at faa Eleverne til at forstaa, at en Sætning, som i Virkeligheden er gal, »maa» være rigtig. Iøvrigt maa det fremhæves fra et metodisk Synspunkt, at Tegningen ikke skal foretages paa Klassetavlen af Læreren, men af alle Eleverne i deres Bøger, og de maa overbevises om, at et galt Resultat ligger i gal Konstruktion.

Pytagoras' Sætning giver i sin geometriske Form rig Anledning til Forstaaelse og Anvendelse af de her fremsatte

Metoder. Som bekendt har *Schopenhauer* fremsat en Kritik af det euklidiske Bevis, som han kalder et Musefældebevis (Welt als Wille und Vorstellung I, § 14) med den Begrundelse, at Eleven Skridt for Skridt lokkes frem til at indrømme Rigtigheden af de enkelte Slutninger, indtil han tilsidst er i Fælden og maa indrømme Sætningens Rigtighed, endskønt han paa ingen Maade er naaet til at opfatte Sætningen som en Kendsgerning. Vi er da igen kommet tilbage til Forskellen mellem at blive overbevist og at forstaa et Bevis. Schopenhauer henviser til, at man for den ligebenede, retvinklede Trekants Vedkommende kan dele hvert af Kateternes Kvadrater ved en Diagonal i to Trekanter, saaledes at de fire Trekanter udfylder Hypotenusens Kvadrat, og han udtaler Ønsket om et saadant Sammenlægningsbevis for den almindelige Trekant; kun et Sammenlægningsbevis kan give den egentlige Forstaaeelse. At der fra gammel Tid eksisterede saadanne Beviser, var ikke Schopenhauer bekendt. Fra vort pædagogiske Standpunkt maa vi give ham Ret i dets Nødvendighed. Jeg skal her antyde, hvorledes man kan føre Eleverne til den rette Forstaaelse, idet jeg for Detaillernes Vedkommende henviser til en »Klassegennemgang af den pytagoræiske Læresætning», som jeg har gengivet i Nyt Tidskrift f. Mat. A. 1910. S. 7.

1. Det kvadrerede Papir giver umiddelbart Lejlighed til at overbevise sig om, at Sætningen gælder for den ligebenede Trekant. 2. Kateterne 3 og 4 afsættes henad Papirets Linier. Hypotenusen maales lig 5. Tallene tilfredsstiller Sætningen. De tre Kvadrater tegnes. De to kan straks maales, men Hypotenusens bestaar baade af Smaakvadrater, Trekanter og Firkanter. Eleverne gør efterhaanden de to Iagttagelser, at Kvadratets Vinkelspidser ligger i Papirgitrets Punkter, og at modstaaende Trekanter og Firkanter ved de parallele Sider ser ud til at supplere hinanden til et Kvadrat. Optællingen giver nu 25 Smaakvadrater. 3. Samme Undersøgelse med 5, 12, 13. Her ligger atter det store Kvadrats Vinkelspidser i Gitterpunkter.

Man undersøger, om det er en Tilfældighed; finder at Kvadratsidernes Projektioner paa Papirets Linier netop er 5 og 12, og at man altsaa bedst kunde konstruere dette Kvadrat ved at tegne Trekanter kongruente med den givne i passende Stillinger; og herved bliver det begrundet at Kvadratstumperne to og to kan udfylde et Kvadrat. 5. Kateterne 7 og 11. Hypotenusen maales $= 13$ ($\sqrt{170} = 13{,}03$). Tallene stemmer ikke med Sætningen, og der opstaar derved et spændende Spørgsmaal. Hypotenusens Kvadrat optælles og man finder 170 Smaakvadrater efter det tidligere Princip. Naar man nu, som før antydet, tegner fire Trekanter kongruente med den givne, en paa hver af Kvadratets Sider, de to indeni og de to udenfor Kvadratet, vil man paa Figuren have Kateternes Kvadrater i ny Stillinger saaledes, at de af Figurens Linier er delt i henholdsvis to og tre Figurer, som ved Omlægning udfylder Hypotenusens Kvadrat. Eleverne er da ført til at forstaa det Spørgsmaal, som er indeholdt i Sætningen, til at faa Syn for dens Rigtighed og til at føre et Bevis, hvis Almengyldighed er indlysende, endskønt man har benyttet specielle Værdier af Kateterne. Endelig er Spørgsmaalet om Hypotenusens Længde ($\sqrt{170}$) blevet rejst. Det kvadrerede Papir har ogsaa her vist sin pædagogiske Værdi.

Ligesom det ved Pytagoras' Sætning er muligt at dele Kateternes Kvadrater i Dele, som kan udfylde Hypotenusens, kan man altid dele ligestore plane Polygoner i parvis kongruente Trekanter; og det er meget instruktivt at føre Beviserne for de elementære Arealsætninger ad denne Vej, saaledes at Eleverne ved et saadant Sammenlægningsspil kommer til at opleve, at Sætningerne er rigtige. I denne Forbindelse erindres om at mange Elever har vanskeligt ved at fastholde Sætningen om Forholdet mellem ligedannede Figurers Arealer. Det naturlige, overbevisende Bevis fremkommer, naar man deler to ligedannede Trekanter, hvis Sider forholder sig som de hele tal $p : q$, i p^2 og q^2 kongruente Trekanter ved Hjælp af Paralleltransversaler. Det er jo kun de rationale Forhold, som har

Interesse, men fra dem kan man iøvrigt slutte til de irrationale.

I min tidligere nævnte »Geometri for Mellemskolen» har jeg, navnlig ved Hjælp af Opgaver, søgt at tilrettelægge en Undervisning paa Grundlag af Erfaringen. Men jeg har tillige i Tilslutning til moderne Undersøgelser over Geometriens Grundlag opbygget Lærebygningen paa et fuldstændigt System af Forudsætninger, der fremtræder som Erfaringssætninger. Det er nemlig, naar Eleverne skal forstaa den matematiske Deduktion, ikke tilstrækkeligt, at de kan forstaa dennes enkelte Led; men det er nødvendigt, at de ser, hvorledes Præmisserne bliver til, og at have dem i en saadan Form, at det er muligt paa ethvert Tidspunkt at bringe Præmisserne i Erindring. I modsat Fald kommer der et Øjeblik, hvor Eleverne faar Fornemmelsen af, at Geometrien beror paa en Slags Behændighedskunster, hvis Resultat ligger i Lærerens Haand. I Danmark havde man forlængst opgivet den euklidiske Fremstilling som Norm for en Lærebog i Geometri, men idet man fjernede Postulaterne, naaede man til en Lærebygning, som baade hos de mere og de mindre tænksomme Elever fremkaldte en Følelse af Utryghed og Uklarhed. Jeg mente det derfor nødvendigt, atter at give Lærebygningen et virkeligt Grundlag, men min Fremstilling fandt ikke megen Forstaaelse, hverken i pædagogisk eller matematisk Henseende. Dog gav den pædagogiske Metode Anledning til Fremkomsten af en ny Bog »*Geometriske Øvelser I—II*» af *H. I. Pihl Hansen* og *Hans Rasmussen* (Kbhvn 1914), hvori en eksperimentel Undervisning er lagt til Rette for Læreren derved, at Teorien udvikles i Spørgeform. Der er her givet et meget instruktivt Undervisningsapparat, men de grundlæggende matematiske Spørgsmaal er ikke taget i Betragtning. Det er imidlertid klart, at hvis man vil forlade den euklidiske Form og dog give en fuldt begrundet Fremstilling paa Grundlag af Erfaringen, bliver det nødvendigt at tage Geometrien op til en ny Undersøgelse fra Grunden. Dette har Professor *J. Hjelmslev*

gjort radikalt, idet han har opbygget en *Virkelighedens Geometri*, det vil sige en Geometri i Tegneplanen, der ikke omhandler de euklidiske Abstraktioner, Linie, Cirkel o. s. v., men den virkelige, med Blyant tegnede Figur. I denne Geometri har, for at nævne Eksempler, en Tangent ikke eet Punkt, men et Liniestykke fælles med Cirklen, to Liniestykker har altid et rationalt Forhold o. s. v. Denne ny Teori er fremsat i *J. Hjelmslev, Elementær Geometri I—II* (Kbhvn. 1916—19), der indeholder henholdsvis Plan- og Rumgeometri, en Lærebog, som ingen Matematiklærer bør forblive ukendt med.

Det skulle glæde mig om jeg med disse Bemærkninger kunde forøge Interessen for Rektor *Hedströms* Forslag; men til dettes Gennemførelse vil ikke en fortsat Diskussion og praktiske Forsøg fra Lærerens Side være tilstrækkelig, men en systematisk Uddannelse af de unge Lærere i den angivne Metode vil være nødvendig.

København, Juni 1920.

Lärogång vid trigonometriens studium.

Av AD. MEYER.

I denna tidskrifts tredje årgång hava ej mindre än tre insändare, av vilka tvenne införts, givit nya bevis för det s. k. tangentteoremet för trianglar, utvisande att de ej äro fullt belåtna med de olika härledningar som finnas i våra läroböcker.

Emellertid torde det vara ganska tvivelaktigt, huruvida lärarne i matematik skola komma att föredraga dessa framför de senare. Det torde nämligen ej vara tvivelaktigt, att *alla* dylika härledningar vidlådas av något artificiellt, och detta beror enligt min mening på, att detta teorem i våra läroböcker är infört på orätt plats: Teoremet ger nämligen ej, såsom de förut lästa sinus- och cosinusteoremen, omedelbart en sökt sida eller vinkel i triangeln, utan ger i dess ställe en *hjälpvinkel* $\frac{\beta - \gamma}{2}$. När då därtill kommer, att teoremet är fullständigt onödigt för skolstadiet, och ger en förenkling blott vid vissa mycket invecklade praktiska beräkningar, såsom t. ex. lantmätarens, så är det intet att förundra sig över, att lärjungen aldrig otvunget använder detsamma, utan endast kan förmås därtill genom ett bestämt förbud att använda cosinusteoremet, vilket för honom ställer sig ofantligt mycket naturligare.

Härmed vill jag dock icke hava sagt, att jag skulle vilja ur min undervisning alldeles utesluta detta teorem, vilket jag, av grunder som sedan skola framgå, helst benämner »cotangentteoremet»; jag vill blott införa detsamma på dess naturliga plats, där dess bevis, i stället för att

såsom i de gamla framställningarna komma såsom något nytt och omotiverat, tvärtom ger en synnerligen vacker tillämpning på det förut inlärda.

När jag därför nu vill giva en framställning av den lärogång jag använder i trigonometrin, så måste jag emellertid först nämna några ord om planimetrin.

I kanske alla läroverk plägar användas en särskild lärobok i planimetri, där figurers metriska egenskaper framställas utan hjälp av de trigonometriska funktionerna, och en mängd tid spilles på att beräkna t. ex. kordan för dubbla bågen, kordan för halva bågen, sidorna i reguljära månghörningar o. s. v. med hjälp av rotuttryck. Detta har alltid förefallit mig såsom en fullständigt onödig tidspillan, då detsamma fås både lättare, intressantare och vackrare sedan trigonometrin är införd, och denna å sin sida kan läsas oberoende av detta, och själva rotuttrycken mycket väl kunna undvaras. Skulle man likväl önska t. ex. det exakta värdet på sin 36° e. d., så kan det ytterst lätt tagas såsom ett övningsexempel i trigonometrin, men i allmänhet kan man ganska väl undvara allt dylikt.

Jag plägar därför uppdela den s. k. planimetrins innehåll på det övriga på följande sätt:

Satserna om trianglars och parallellogrammers ytinnehåll $\left(T=\frac{hb}{2},\ P=hb\right)$ tagas väl numera av de allra flesta lärare redan i fjärde klassen, eller senast i den femte i sammanhang med satserna om trianglar och parallellogrammer med lika höjder och baser; och skulle det därstädes, mot förmodan, hava blivit försummat, så erbjuda ju de första satserna i Euklides 6:e bok ett förträffligt tillfälle därtill, varvid jag naturligen ej heller försummar att beröra formlerna för parallelltrapetset $\left(F=h\cdot\frac{a+b}{2}\right)$, för omskrivbara månghörningar $(M=rp)$ o. s. v. Satserna om den rätvinkliga triangelns sidor $(a^2+b^2=c^2)$ samt motsvarande om den likbenta och liksidiga triangeln

$\left(b^2=h^2+\frac{a^2}{4},\ h=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ T=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$ samt, om man så vill, även satserna om trubbvinkliga och spetsvinkliga trianglar läsas naturligtvis i samband med pytagoreiska satsen, och läran om cirkelns yta och omkrets ävensom sektorns yta och båge i samband med tillhörande satser i slutet av Euklides 6:e bok, ty ingen lärare torde väl numera läsa dessa satser rent geometriskt utan algebraiska tillämpningar. Likaså tar jag i sammanhang med läran om »gyllne snittet» uträkningen av den så delade linjens delar och således även den reguljära 10-hörningens sida. För allt detta behövs således alls ingen särskild »planimetri», utan var sak tages i sitt naturliga sammanhang. Att genom en mångfald exempel särskilt innöta dessa satser har jag alltid funnit onödigt, då de i alla fall ständigt förekomma i det följande i samband med trigonometrin, och lärjungarna därför aldrig kunna glömma bort dem så, att de ej genast kunna lösa ett på dessa grundat exempel på samma sätt som varje annat algebraiskt problem.

Jag kan således utan förmedling av någon planimetri omedelbart övergå till definitionen av de trigonometriska funktionerna vid den rätvinkliga triangeln; och har det aldrig hänt mig, att ej lärjungarna omedelbart själva kunnat angiva sinus, cosinus och tangent för 30° och 60° efter ett enkelt påpekande, att den ifrågavarande triangeln är hälften av en liksidig. Lika lätt finna de även satserna

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \text{ och } \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Vid den rätvinkliga triangeln uppehåller jag mig däremot synnerligen länge, då detta utan tvivel är det viktigaste av hela trigonometrins förra kurs, och de allra flesta i stereometrin och fysiken förekommande problem kunna lösas därmed. Om triangelns hypotenusa kallas c och kateterna a och b, så är jag t. ex. ej nöjd med att de omedelbart se att $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ och $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, utan

jag fordrar att de med lika lätthet utan uträkning skola kunna angiva t. ex. att $a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \cot \beta$ eller att $c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ o. s. v. Likaledes behandlas redan här funktionernas växlingar och deras grafiska framställning mellan 0° och 90°, deras värden för de speciella vinklarna 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, de trigonometriska och logaritmiskt-trigonometriska tabellerna samt ett stort antal exempel, även på likbenta trianglar, cirkelsegment och matematisk geografi.

*

Härefter övergår jag till snedvinkliga trianglar, d. v. s. till sinus- och cosinusteoremen. Det förra tar jag i allmänhet på följande sätt:

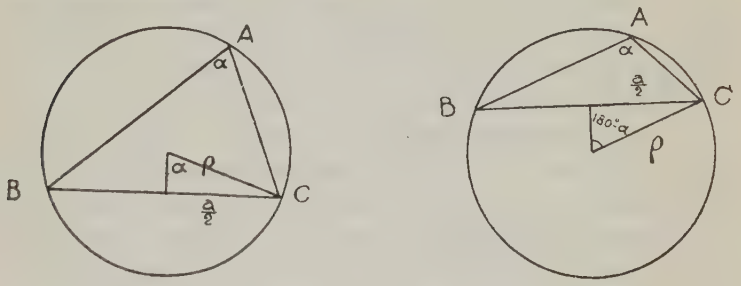


Fig. 1.

Ur fig. 1 fås omedelbart

$$\varrho = \frac{\frac{a}{2}}{\sin \alpha}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

om α är en spetsig vinkel, och

$$\varrho = \frac{\frac{a}{2}}{\sin (180° - \alpha)}, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

om α är trubbig.

Härefter anmärkes, att formel (1) skulle bliva menings-

lös om α är trubbig, och (2) om α är spetsig, enär de trigonometriska funktionerna blott äro definierade för spetsiga vinklar; men att de båda kunna fås att sammanfalla, om man blott ger följande *definition:*

Med sinus för en trubbig vinkel menas sinus för dess supplement.

Man får således såsom allmän regel

$$2\varrho = \frac{a}{\sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Härefter utvecklas läran om cyklisk permutation, och man får

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

vilket jag benämner »sinusteoremet med dess första tillägg».

Därefter tager man på vanligt sätt fram formeln

$$T = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ca \sin \beta}{2}$$

(sinusteoremets andra tillägg), och sedan

$$\varrho = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{abc}{2bc \sin \alpha} = \frac{abc}{4T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

(vilken sista formel utgör sinusteoremets tredje tillägg).

Härefter övergår jag (vanligen utan att först räkna exempel på sinusteoremet) omedelbart till cosinusteoremet.

Cosinusteoremet bevisas först när α är spetsig, sedan när α är trubbig, och man får formlerna

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (\alpha \text{ spetsig}) \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

och

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos (180^\circ - \alpha) \quad (\alpha \text{ trubbig}),$$

vilka sammanfalla till en enda (6), om man blott inför *definitionen:*

Med cosinus för en trubbig vinkel förstås cosinus för dess supplement med ombytt tecken,

varefter även denna formel kan cykliskt permuteras.[1]

[1] Att redan här införa läran om övertrubbiga vinklar och deras trigonometriska funktioner, såsom i Hedström-Rendahls trigonometri, anser jag vara ett missgrepp.

Här är nu platsen för införande av själva huvudmassan av exempel på snedvinkliga trianglars beräkning, och lärjungarna finna utan minsta svårighet själva, genom vilka metoder de skola klara de olika »händelserna». Ett påpekande av »4:e händelsens» tvetydighet är naturligtvis nödvändigt, och uppvisas dettas samband med »bivillkoret» i 4:e kongruensfallet. I avseende å »händelsernas» numrering anser jag, att motsvarande kongruensfall, likformighetsfall och trigonometriska händelser ovillkorligen böra numreras lika, och helst sålunda: 1) två sidor och mellanliggande vinkel 2) två (tre) vinklar och en sida 3) tre sidor 4) två sidor och en motstående vinkel. Men man bör naturligtvis ej inskränka sig till »händelserna», där sidor och vinklar äro givna eller sökas, utan även bland det givna eller det sökta införa höjder, medianer, bissektriser, inskrivna och omskrivna cirklarnas radier o. s. v. Bland dessa övningsexempel får då naturligtvis även den s. k. mediansatsen sin givna plats, under det att däremot det planimetriska uttrycket på bissektrisen, såsom krångligt och fullständigt onödigt, helst bör uteslutas, då man lättare får trigonometriska uttryck för densamma. Cyklisk permutation bör ständigt övas.

Härmed skulle då själva triangelläran kunna vara slut, och om tiden i andra ringen av en eller annan orsak bleve synnerligen knapp, så kunde man även nöja sig härmed, men av flera grunder vill jag ej gärna lämna lärjungarna i okunnighet om det viktiga formelsystem, som plägar benämnas »tredje[1] händelsens formler» eller hos Hedström-Rendahl »några cirkelsatser», men som jag plägar benämna »tangentteoremet», emedan en tangent däri ingår såsom den väsentligaste beståndsdelen, likasom sinus och cosinus i de båda föregående teoremen.

Jag utgår då från den i så många avseenden intressanta fig. 2, en triangel med den inskrivna och en av de vidskrivna cirklarna. I denna figur uträknas först storleken av en mängd linjer, särskilt de i figuren med p, $p-a$,

[1] Enligt annan räkning fjärde.

$p-b$ och $p-c$ betecknade. Många andra intressanta linjer finnas där även (se Jul. Petersen, teorier och metoder), men dessa äro de som i det följande behövas. Ur de likformiga trianglarna AOT och AO_1T_1 samt ur de likaledes likformiga COT och O_1CT_1 fås då[1]

$$\frac{r}{r_a}=\frac{p-a}{p} \text{ och } r\cdot r_a=(p-b)(p-c),$$

varur

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$r_a=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

och genom cykl. perm.

$$r_b=\sqrt{\frac{p(p-c)(p-a)}{p-b}}$$

$$r_c=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

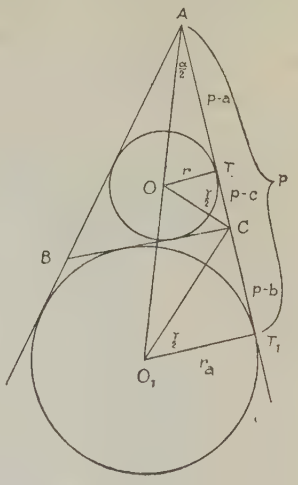


Fig. 2.

Vidare fås omedelbart

$$T=rp=r_a(p-a)=\ldots.=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

och

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{p-a}=\frac{r_a}{p}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r}{p-b}=\frac{r_b}{p}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{p-c}=\frac{r_c}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Dessa formler äro särdeles lärorika, ty utom att de avgiva förträffliga exempel på cyklisk permutation, så äro de även lärorika i fråga om dimensionerna, i det att

[1] Beviset hämtat från Jul. Petersen.

radikanden i uttrycket för T är av 4:e, i uttrycken för r, r_a, r_b, r_c av 2:a och i uttrycken för tangenterna av 0:te graden, och man kan visa, hur alltid den enda möjliga faktorn kryper ned i nämnaren, när man från T övergår till linjer och sedan till trigonometriska tal. Allt detta plägar intressera lärjungarna mycket.

Men dessa formler sakna ju ej heller praktisk betydelse, fastän den är inskränkt huvudsakligen till det fall att de tre sidorna äro givna och att deras tal äro så stora att cosinusteoremet blir olämpligt att använda. Jag plägar därför giva lärjungarna ett mönster för huru de då skola uppställa sin räkning, såsom t. ex. följande:

$$\begin{aligned}
a &= 1,592 \\
b &= 0,912 \\
c &= 0,764 \\
2p &= 3,268 \\
p &= 1,634 = [0,2132] \\
p-a &= 0,042 = [8,6232] \\
p-b &= 0,722 = [9,8585] \\
p-c &= 0,870 = [9,9395] \\
T^2 &= [8,6344] \\
T &= [9,3172] = 0,2076 \\
r &= \frac{T}{p} = [9,1040] = 0,12706 \\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \frac{r}{p-a} = [0,4808]; \quad \frac{\alpha}{2} = 71°,71 \\
\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= \frac{r}{p-b} = [9,2455]; \quad \frac{\beta}{2} = 9°,98 \\
\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} &= \frac{r}{p-c} = [9,1645]; \quad \frac{\gamma}{2} = 8°,31 \\
& \qquad\qquad 90°,00
\end{aligned}$$

således $\alpha = 143°,42$
$\beta = 19°,96$
$\gamma = 16°,62.$

Sedan några dylika exempel äro räknade, anser jag trigonometrins förra del, och därmed 2:dra ringens kurs å reallinjen eller hela latinlinjens kurs, avslutad.

*

Trigonometriens senare del inleder jag med vinkelmätning i radianer samt vinkelbegreppets generalisering, den trigonometriska cirkeln samt de därur härledda formlerna för de trigonometriska funktionerna för $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$, $\frac{3\pi}{2}-\alpha$, $\frac{3\pi}{2}+\alpha$, $2\pi-\alpha$, $-\alpha$, ävensom den fullständiga grafiska framställningen samt härledningen av de övriga trigonometriska funktionerna, när en av dem är given. Det sistnämnda ger en vacker tillämpning av korresponderande addition, så t. ex. om $\operatorname{tg}\alpha = a$, så är $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\cos\alpha}{1} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, således $\sin\alpha = \pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ och $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ samt bestämning av tecknet.

Här kan man även, om man så önskar, införa den fullständiga lösningen av ekvationerna $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ och $\cot x = a$, såvida man ej anser lämpligare att taga de trigonometriska ekvationerna i ett sammanhang. I detta avseende har jag gjort än på det ena, än på det andra sättet. Båda delarna ha sina fördelar: tages det här, så måste det i alla fall sedan upprepas.

Härefter kan man övergå till den viktigaste och svåraste satsen i trigonometrins senare del, utveckling av $\cos(\alpha+\beta)$. Jag plägar förbereda den genom de båda projektionssatserna, vilka visserligen ej äro lätta, men mycket nyttiga,

nämligen 1) projektionen av den begränsade linjen a på den obegränsade x är lika med $a\cos(a, x)$, och 2) projektionerna av två olika vägar mellan punkterna A och B på samma linje äro lika, vilken sats jag även utsträcker till 3 dimensioner. Härefter bevisar jag satsen genom den trigonometriska cirkeln för följande fall: 1) $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, 2) $\beta<\frac{\pi}{2}$, men α en vinkel av godtycklig storlek, 3) α och β hur stora som helst. Man kan naturligtvis även taga endast det första ur trigonometriska cirkeln och sedan sätta t. ex. $\alpha=\frac{\pi}{2}+\alpha'$, $\beta=\pi+\beta'$ o. s. v. Även i detta fall har jag förfarit olika: det förra sättet är så till vida svårare, att det fordrar mer åskådning, men det ger en mer konkret uppfattning av saken.

De övriga motsvarande satserna tar jag däremot alltid så, att jag sätter $\cos(\alpha-\beta)=\cos[(\alpha+(-\beta)]$, $\sin(\alpha+\beta)=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$ o. s. v. Sedan således de fyra formlerna $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ och $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ äro genomgångna och väl inlärda, så följer hela massan av formler för tangenten för en summa eller skillnad, för dubbla vinkeln, halva vinkeln, vinklarna i en triangel o. s. v., varvid jag plägar indela dem i tre grupper: 1) rena utanläsningsformler, 2) sådana som lätt böra kunna fås fram, helst i huvudet, och 3) sådana som blott äro övningssatser. Vid problemlösning få aldrig några andra formler än de som tillhöra avdelningarna 1) och 2) användas utan bevis.

Här kan man, om man så vill, såsom övningar taga de trigonometriska funktionerna för 36°, 72°, 18°, 24° o. s. v., således de reguljära euklideiska månghörningarnas sidor.

De viktiga satserna för uppdelning i faktorer plägа i läroböckerna tagas på ett mycket artificiellt sätt, i det att man utgår från de i sig själva föga viktiga formlerna

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$ o. s. v., för att sedan genom en substitution komma fram till $\sin\alpha+\sin\beta$ o. s. v. Denna indirekta väg har alltid synts mig motbjudande, och jag föredrar att gå rakt på saken genom att, då t. ex. $\sin\alpha+\sin\beta$ skall uppdelas i faktorer, sätta

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\\ \beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}$$

och får då omedelbart

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+$$
$$+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

och på samma sätt med de tre övriga, ett förfaringssätt som lärjungarna lätt kunna hålla i minnet och t. o. m. verkställa beräkningen i huvudet, då de genast se vilka termer som få lika, och vilka som få motsatta tecken. Dessa formler räknar jag därför till grupp 2) ovan.

Såsom en av de förnämsta tillämpningarna av dessa formler tar jag nu det vanligen s. k. tangentteoremet och de Mollweideska formlerna,[1] vilka jag, som ovan nämnts, brukar sammanfatta under namnet cotangentteoremets formelsystem, så att jag på detta sätt i trigonometrin får ett sinus-, ett cosinus-, ett tangent- och ett cotangentteorem, och ej behöver benämna något av dem efter »händelserna», vilka för övrigt kunna efter olika principer förses med olika nummer.

Detta sker på följande sätt:

[1] Redaktionen har blivit uppmärksamgjord på att dessa formler med orätt i litteraturen fått Mollweides namn, då de äro framställda långt före honom. (Se Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik II. 241.)

$$\overset{1)}{\frac{a}{\sin\alpha}} = \overset{2)}{\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}} = \overset{3)}{\frac{b}{\sin\beta}} = \overset{4)}{\frac{c}{\sin\gamma}} = \overset{5)}{\frac{b+c}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}} =$$

$$= \overset{6)}{\frac{b+c}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}} = \overset{7)}{\frac{b-c}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}} = \overset{8)}{\frac{b-c}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}}.$$

Ur 6) och 8) fås nu $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{\alpha}{2}$.

Ur 2) och 6) $$a = \frac{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Ur 2) och 8) $$a = \frac{(b-c)\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Sedan några exempel räknats på detta, och resultaten jämförts med dem som fås genom cosinusteoremet, och några andra tillämpningar på upplösning i faktorer genomgåtts, så återstår av trigonometrin intet vidare än trigonometriska ekvationer, vid vilka jag icke har något att tillägga till vad som anförts i t. ex. Hedström-Rendahls lärobok.

Är N primtal eller ej?

Av CARL BODLUND.

I.

Frågan huruvida ett givet (udda) tal är primtal eller kan uppdelas i faktorer, är så vitt jag vet ännu ej besvarat med en god generell regel. Lika litet finns en nöjaktig metod att uppdela ett tal, som eventuellt ej är primtal, i faktorer. För vissa grupper av tal, t. ex. för $N = 2^{2^n} - 1$, ha lämnats praktiska metoder att besvara frågan. Den närmast till hands liggande allmänna metoden är att undersöka ett givet tal genom att dividera detsamma på försök med primtalen fr. o. m. 3, tills divisionen eventuellt går jämnt upp. Går intet av primtalen fr. o. m. 3 upp till $\sqrt{N}$ jämnt upp i N, så är N primtal. Denna metod kan likväl bli ganska tidsödande. Vi ha 23 primtal under 100, 166 primtal under 1 000 o. s. v., varför det kan bli fråga om ganska många divisioner, innan man nått det önskade resultatet. Jag äger en tabell över alla udda tal t. o. m. 9 997, ej delbara med 5 eller 3, i vilken faktorerna äro utsatta för varje divisibelt tal, och de övriga — primtalen — äro markerade med röd understrykning. Men har man ingen sådan tabell till sitt förfogande, eller gäller det t. ex. ett femsiffrigt tal, så är man nödsakad att göra en särskild undersökning.

Den metod för en sådan undersökning, som jag här nedan vill demonstrera, tror jag skall i regel ge resultat betydligt raskare än metoden med försöksdivisioner. Den fordrar endast elementära kunskaper i matematik. För stora tal blir även denna metod besvärlig. Ofta är, som

nedan skall visas, en kombination av försöksdivisioner (med de små primtalen) och denna metod det mest praktiska.

II.

Varje i det följande använd bokstav betecknar ett helt positivt tal.

Identiteten $(r+1)^2-r^2=2r+1$ visar, att vilket udda tal N som helst kan anses utgöra skillnaden mellan två närliggande kvadrater. Sättes det udda talet $N=(r+x)^2-r^2$ eller $=x(2r+x)$, så är därmed N uppdelat i de två udda faktorerna x och $2r+x$. Ekvationen $N=x(2r+x)$ ger $x=\sqrt{r^2+N}-r$ (det negativa värdet förkastas). Andra faktorn i N, $2r+x$, som vi beteckna med y, blir $\sqrt{r^2+N}+r$. Kan man nu finna något värde på r, som gör $\sqrt{r^2+N}$ till ett helt tal s, så har man uppdelat N i två heltalsfaktorer x och y.

$$N=xy=(\sqrt{r^2+N}-r)(\sqrt{r^2+N}+r)=(s-r)(s+r).$$

Därvid kan möjligen inträffa, att det finns flera värden på r, som duga. Alltid finns *ett* användbart värde på r, det som gör $x=1$ och $y=2r+1$ eller $N=1\cdot(2r+1)=1\cdot N$. Skulle intet annat nöjaktigt värde på r finnas, så betyder detta, att N är primtal.

Av likheten $N=x(2r+x)$ framgår, att x är den mindre av de båda faktorerna i N. Vi kunna därför instänga x mellan gränserna

$$\sqrt{N}\geqq x\geqq 1.$$

Likheten $2r+x=\frac{N}{x}$ visar, att när x växer kontinuerligt, så måste $2r+x$, d. v. s. r kontinuerligt avtaga. För $x=\sqrt{N}$ blir $r=0$. För $x=1$ blir $r=\frac{1}{2}(N-1)$. Alltså få vi

$$0\leqq r\leqq\frac{1}{2}\left(N-1\right) \text{ eller } 0\leqq r^2\leqq\frac{1}{4}\left(N-1\right)^2.$$

Vi ha alltså nu att med hjälp av en kvadrattabell göra försök genom att insätta kvadrattal inom de för r^2 angivna gränserna i $\sqrt{r^2+N}$, till dess vi finna ett värde på r^2, som gör denna rot till ett helt tal s eller m. a. o. r^2+N till en jämn kvadrat s^2. Passar härvid intet annat värde på r^2 än $\frac{1}{4}\left(N-1\right)^2$, så är N primtal.

Exempel: $N=91$; $s=\sqrt{r^2+91}$ blir helt tal för $r^2=9$ och $r^2=2025$ ($s=10$ och $s=46$). Det förra värdet ger $x=s-r=10-3=7$ och $y=s+r=10+3=13$, $N=7\cdot 13$. Det senare ger $N=1\cdot 91$. För $N=117$ få vi på r^2 tre användbara värden, nämligen $r^2=4 (s=11)$, $r^2=324 (s=21)$ och $r^2=3364 (s=59)$, vilka ge oss $N=9\cdot 13=3\cdot 39=1\cdot 117$.

Emellertid lämnar det angivna förfaringssättet alltför många försöksvärden på r^2 för att vara praktiskt. Jag bemärker därför, att då $N=s^2-r^2$, så är $r=\sqrt{s^2-N}$ samt $x=s-\sqrt{s^2-N}$ och $y=s+\sqrt{s^2-N}$. Likheten $s^2=N+r^2$ visar, att s växer på samma gång som r, och då r^2 går från 0 till $\frac{1}{4}\left(N-1\right)^2$, går s^2 från N till $\frac{1}{4}\left(N+1\right)^2$, alltså

$$N\leqq s^2\leqq\frac{1}{4}\left(N+1\right)^2.$$

Vi skulle nu kunna som nyss genom försök få $\sqrt{s^2-N}$ till helt tal r, men då försöksmöjligheterna fortfarande äro lika många, vilja vi söka finna på något annat kriterium på s^2, varigenom vi kunna utvälja ett mindre antal värden på s^2 mellan de angivna gränserna, och därmed även inskränka antalet försök.

III.

Först gör jag då den inskränkningen beträffande talet N, att det får betyda ett udda tal, som slutar på 1, 3, 7 eller 9. Tal, som sluta på 5, äro ju lätt delbara. Framför sista siffran kan vara en jämn (j) eller udda (u) tiotalssiffra.

N kan alltså sluta på något av följande åtta sätt: *u1*, *j1*, *u3*, *j3*, *u7*, *j7*, *u9* och *j9*.

Vilket helt tal som helst kan skrivas under formen $10a+b$, där b är ental. Hela tals kvadrater ha följaktligen formen $(10a+b)^2$ eller $100a^2+20ab+b^2$. Första termen i sistnämnda uttryck har ingenting att göra med tiotals- och entalssiffrorna i kvadrattalet. Andra termen gör, vad på den ankommer, tiotalssiffran jämn. Men denna siffra kan även påverkas av b^2, om nämligen b^2 är ett tvåsiffrigt tal. Sista siffran i kvadrattalet bestämmes enbart av b^2. Genom insättning av olika värden på b från och med 0 till och med 9 och under iakttagande av vad nyss är sagt finner man utan svårighet, att ett kvadrattal måste sluta på något av följande sex sätt, nämligen *j1* (01, 21, 41, 61, 81), *j9* (09, 29, 49, 69, 89), *j4* (04, 24, 44, 64, 84), *u6* (16, 36, 56, 76, 96), *25* och *00*.

Talet N är givet, och vi veta, på vilka två siffror detta slutar. Härigenom begränsas nu betydligt de möjligheter, på vilka s^2 (och r^2) kan sluta. Om vi exempelvis antaga, att N slutar på *u3* (t. ex. 2873) och således kan skrivas $(20b-10)+3$, så kan s^2 inte sluta på t. ex. *j1* eller vara av formen $20a+1$, för så vitt r^2 eller s^2-N skall vara jämn kvadrat. Ty $s^2-N=(20a+1)-(20b-10+3)=20(a-b)+8$, och ett tal som slutar på 8 kan icke vara jämn kvadrat. Liknande undersökningar kunna göras för övriga fall, men det torde vara överflödigt att här göra dem. Resultatet blir följande

Schema.

s^2	—	N	=	r^2
u6 eller *00*		*u1*		*25* eller *j9*
36, 56, 76, 96, 16		11, 31, 51, 71, 91		89, 69, 49, 29, 09
j1 eller *25*		*j1*		*00* eller *j4*
01, 21, 41, 61, 81		01, 21, 41, 61, 81		24, 04, 84, 64, 44
j4 eller *00*		*u9*		*25* eller *j1*
44, 64, 84, 04, 24		19, 39, 59, 79, 99		81, 61, 41, 21, 01

s^2	—	N	=	r^2
$j9$ eller 25		$j9$		00 eller $u6$
09, 29, 49, 69, 89		09, 29, 49, 69, 89		16, 96, 76, 56, 36
$j9$		$u3$		$u6$
$j4$		$j3$		$j1$
$j1$		$u7$		$j4$
$u6$		$j7$		$j9$

Ordningen mellan talen betingas av att r^2 skall vara jämn kvadrat på samma gång som s^2. För t. ex. $u1$ bör man därför läsa $36-11=56-31=76-51=96-71=16-91=25$; $00-11=89$; $00-31=69$, $00-51=49$, $00-71=29$ och $00-91=09$. Slutar N på 39, så måste s^2 sluta på $64(64-39=25)$ eller $00(00-39=61)$, icke på $44(44-39=05)$, och på 05 kan ej en jämn kvadrat sluta.

Med tillhjälp av detta schema och en tabell över hela tals kvadrater kan man söka sig till ett värde på s, d. v. s. uppdela N i två faktorer.

Exempel:

1) $N=3239$.

Då N slutar på 39, måste enligt schemat s^2 sluta på 64 eller 00. I tabellen ha vi således att uppsöka endast de kvadrattal >3239, som sluta på 64 eller 00.

$3364-3239=125$ (ej jämn kvadrat),
$3600-3239=361$ (kvadrat på 19).

Alltså ha vi redan vid andra försöket funnit $s=60$ och $r=19$, $x=41$ och $y=79$, d. v. s. $3239=41\cdot 79$.

2) $N=29993$.

Enligt schemat måste s^2 sluta på $j9$.

$31329-29993=1336$
$33489-$ » $=3496$
$34969-$ » $=4976$
$37249-$ » $=7256$
$38809-$ » $=8816$

$$41209 - 29993 = 11216$$
$$42849 - \text{ » } = 12856$$
$$45369 - \text{ » } = 15376 = 124^2.$$

Alltså $s = 213$, $r = 124$ och $29993 = 89 \cdot 337$.

3) $N = 12349$ (s^2 slutar på 49 eller 25)

$$13225 - 12349 = 876$$
$$15625 - \text{ » } = 3276$$
$$18225 - \text{ » } = 5876$$
$$20449 - \text{ » } = 8100 = 90^2.$$

$s = 143$, $r = 90$, $12349 = 53 \cdot 233$.

4) $N = 16789$ (s^2 slutar på 89 eller 25)

$$17689 - 16789 = 900 = 30^2$$

$s = 133$, $r = 30$, $16789 = 103 \cdot 163$.

5) $N = 43429$

(log $e = 0{,}434\,29$; s^2 slutar på 29 eller 25)

$$46225 - 43429 = 2796$$
$$49729 - \text{ » } = 6300$$
$$50625 - \text{ » } = 7196$$
$$51529 - \text{ » } = 8100 = 90^2$$

$s = 227$, $r = 90$; $43429 = 137 \cdot 317$.

IV.

Om x oavbrutet växer från 1 till $\sqrt{N}$, så avtaga r^2 och s^2 kontinuerligt. Genom att höja den under gränsen för x bör man alltså kunna sänka de övre gränserna för r^2 och s^2. Har man t. ex. på försök dividerat N med de två primtalen 3 och 7 och ingendera divisionen gått jämnt upp, så är det tydligt, att om N har någon faktor x, så måste den vara större än 7, ja t. o. m. större än 10, emedan nästa primtal efter 7 är större än 10. För $x = 10$ få vi ur likheten

$N = x(2r + x)$ talet $r = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{10} - 10\right)$ och $r^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{N}{10} - 10\right)^2$.

Vidare få vi $s^2=\frac{1}{4}\left(\frac{N}{10}+10\right)^2$. Dessa värden på r^2 och s^2 utgöra nya övre gränser för dem, om nedre gränsen för x höjes till 10. I allmänhet få vi

$$0 \leqq r^2 \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{N}{a}-a\right)^2 \text{ och}$$

$$N \leqq s^2 \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{N}{a}+a\right)^2, \text{ därest}$$

$$\sqrt{N} \geqq x \geqq a.$$

Genom att på försök dividera N med de minsta primtalen 3, 7, 11 o. s. v., så kan man avsevärt begränsa området för s^2 och sålunda förkorta arbetet. Det är just de små faktorerna, som kräva höga värden på s^2 och en lång rad av försök, medan faktorer i närheten av $\sqrt{N}$ fås så gott som omedelbart. Därför är det ofta fördelaktigast att söka nå målet från två håll, dels genom försöksdivisioner med 3, 7, 11 ..., dels genom försök med s^2.

Om t. ex. $N=2491$ (s^2 slutar på 16 eller 00) få vi

$$2500-2491=9=3^2,$$

alltså genast $s=50$, $r=3$ och $2491=47\cdot 53$.

Är däremot $N=2483$ (s^2 slutar på $j4$), få vi först vid elfte försöket

$$10404-2483=7921=89^2$$

och $2483=13\cdot 191$. Här ligga faktorerna 13 och 191 långt ifrån $\sqrt{N}$, och försöksdivisioner med 3, 7, 11 och 13 hade fortare fört till målet. Hade 2483 råkat vara primtal, så hade raden av försök blivit mycket lång.

Vi taga $N=1201$, vilket tal, som ögonblickligen inses, ej är delbart med 3, 7, 11 eller 13. Vi kunna då som övre gräns för s^2 sätta $\frac{1}{4}\left(\frac{1201}{15}+15\right)^2=\frac{1}{4}\cdot 95^2<2300$.

$$1225-1201=24$$
$$2025-\ \text{»}\ =824.$$

Längre behöva vi ej gå, ty nästa försöksvärde på s^2 skulle vara 2401, som är > 2300. Det finns således intet användbart värde på s^2. Talet 1201 är primtal. Vid enbart försöksdivisioner hade vi nödgats dividera förutom med 3, 7, 11 och 13, även med 17, 19, 23, 29 och 31.

$N = 76543$ (s^2 slutar på $j4$; enligt ett större schema, som tar hänsyn även till hundratalssiffran, men som jag ej ansett lämpligt upptaga i denna lilla uppsats, måste s^2 sluta på $u04$, $j24$, $u44$, $j64$ eller $u84$). Sättes $a = 100$, blir $\frac{1}{4}\left(\frac{N}{a} + a\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot 865{,}43^2 < 187500$. Efter 32 (med det större schemat 16) försök med s^2 finner man, att 76543 ej har någon faktor > 100. Genom försöksdivisioner med de 23 primtalen under 100 finner man till slut, att *76543 är primtal.* Enbart divisionsmetoden skulle ha kräft ytterligare 33 divisioner med tresiffriga divisorer och varit besvärligare än de 32 (16) försökssubtraktionerna $s^2 - N$.

V.

Då $s^2 \geqq N$, är det tydligt, att om man skall ha någon nytta av den nu beskrivna metoden, så måste man ha att tillgå en kvadrattabell, som innehåller kvadrater $n^2 > N$. Med en liten tabell upp till $n^2 = 1000^2$ måste man alltså inskränka sig till undersökning av tal under 1000000, d. v. s. högst sexsiffriga.

Men om man också kan med hjälp av tillgänglig tabell *börja* en undersökning av N enligt metoden, så måste man upphöra därmed, när s^2 s. a. s. växer ut över tabellen. Med andra ord, den övre gränsen för s^2 måste genom försöksdivisioner tvingas ned till ett värde, som ej överskrider tabellens sista kvadrattal n^2. Således kunna vi sätta

$$N \leqq s^2 \leqq n^2.$$

Ju större N är, inom desto trängre gränser kommer s^2, och inom desto mindre område kan undersökningen göras

på angivet sätt. Når man inte målet genom denna undersökning, återstår att försöksdividera.

Likheten $\frac{1}{4}\left(\frac{N}{a}+a\right)^2=n^2$ ger

$$a=n-\sqrt{n^2-N}.$$

För $n=1000$, blir $a=1000-\sqrt{1000000-N}$. Om $N<1000$, är $a<1$, d. v. s. för tresiffriga tal behövs ingen försöksdivision. Om $N<10000$, är $a<6$, vilket innebär, att för större fyrsiffriga tal behövs division med 3. Om $N<100000$, är $a<52$. De största femsiffriga talen måste alltså föröksdivideras med primtalen t. o. m. 47. Slutligen få vi $a<1000$ för $N<1000000$, vilket betyder, att för t. ex. 999997 metoden är oanvändbar, såvida man ej har tillgång till en större tabell över kvadrattalen. Har man en tabell upp till $n=10000$, behövs för 999997 försöksdivisioner endast med primtalen t. o. m. 47, för 9999997 med primtalen t. o. m. 509.

$N=3{,}14159$. Formeln $a=n-\sqrt{n^2-N}$ ger $a<172$. Försök med s^2 (27 st. med det större schemat[1]) visa, att 314159 icke har till faktor något av de 63 primtalen mellan 172 och 560 ($\sqrt{314159}$). Återstår att dividera på försök med de 37 primtalen under 172. Talet 314159 är primtal.

Tillägg.

För lösningen av det problem, som här ovan varit föremål för en liten enkel granskning, vore det måhända av värde att ägna kvadrattalens struktur en djupare undersökning. De enkla »strukturformler» för dessa tal, som på grund av ovanstående skulle kunna uppställas, säga ju något, men inte mycket. De äro, om *Z* får beteckna den del av talet, som föregår tiotalssiffran, *Zj*1, *Zj*4, *Zj*9, *Zu*6, *Z*25 och *Z*00. *Z* kan i dessa formler ej betyda vad tal

[1] s^2 skall sluta på 0000, *j*400, *u*600, *u*184, *j*384 eller 4784.

som helst, utan måste också vara av en bestämd struktur. En närmare undersökning härav överlämnar jag likväl åt någon annan möjligen intresserad. I förbigående kan jag nämna, att jag funnit, att

$$iZj1 \qquad Z=\left(5n\pm\frac{1}{2}j\right)^2\pm n,$$

$$iZj4 \qquad Z=\left(5n\pm\frac{3}{2}j\right)^2+\frac{1}{2}j\pm 2n,$$

$$iZj9 \qquad Z=\left(5n\pm j\right)^2+\frac{1}{2}j\pm 3n,$$

$$iZu6 \qquad Z=\left(5n\pm 2j\right)^2+\frac{3}{2}j\pm 4n, [j=u-1]$$

$$iZ25 \qquad Z=n(n+1), [=(5n\pm p)^2+p\pm 5n],$$

$$iZ00 \qquad Z=n^2,$$

varvid n (och p) får betyda vilket helt positivt tal som helst, inkl. 0, och lika tecken böra tagas samtidigt. Detta går emellertid utom ramen för min uppsats, men jag har likväl nämnt det i hopp att därmed kunna väcka en smula intresse för det matematiska problem, som jag i min uppsats berört, och som ännu väntar på en god och vacker lösning.

En ny metod för läran om krafters sammansättning.

Av AD. MEYER.

I olika läroböcker om rationell mekanik tages läran om sammansättning av krafter som verka på ett fast system på två väsentligt olika sätt: Stundom förlägges hela denna lära efter kinematiken och behandlas på grundval av rörelseläran, i andra fall tages den genast i början, men då måste såsom axiom uppställas satsen, att resultanten delar mitt itu vinkeln mellan krafterna, om dessa äro lika stora och verka på samma punkt, eller något dylikt; och i varje fall blir behandlingen av parallella krafters resultant mycket konstlad, i det att man inför tvenne krafter, som äro lika stora och motsatta för att förvandla de parallella krafterna till divergerande och sedan åter borttager dessa. Krafter som ligga i olika plan pläga alls ej behandlas.

Jag har trott mig kunna råda bot på dessa olägenheter genom att redan från början, omedelbart efter kraftbegreppet, införa begreppet »statiskt moment med avseende å en punkt» och definiera *två krafters resultant* såsom *den kraft, vars statiska moment med avseende å varje punkt är lika med algebraiska summan av de båda krafternas statiska moment med avseende å samma punkt.* Härvid räknas de moment såsom positiva, som vilja åstadkomma en motsolsvridning och de såsom negativa, som vilja åstadkomma en medsolsvridning (eller tvärtom).

Motiveringen till denna definition är lätt insedd. Den grundar sig på axiomet att en krafts vridande förmåga på en fast kropp, rörlig kring en fast punkt, är proportionell mot kraftens statiska moment med avseende på denna punkt. Om således en kraft har samma statiska moment som två andra krafter *med avseende å vilken punkt som helst*, så åstadkommer den samma vridning som dessa; och då en parallellförflyttning kan anses som en vridning kring en oändligt avlägsen punkt, så åstadkommer den även samma parallellförflyttning som de båda andra. Insättes således en kraft lika stor och motsatt med resultanten i samma punkt som denna, då får kroppen varken vridning kring någon punkt eller parallellförflyttning.

Den framställning, som här kommer att ges, är rent vetenskaplig och kan naturligen icke i oförändrat skick meddelas i gymnasiets första ring; dock har jag därstädes några gånger använt ett framställningssätt som i stort sett ansluter sig till densamma, och tror mig därigenom hava bibragt lärjungarna en något djupare syn på saken än den de få genom den vanliga framställningen, och ej heller hava de haft svårare att förstå densamma.

Vi anmärka då först, att *statiska momentet av en kraft k med avseende å en punkt P är proportionell mot den triangel, som har P till spets och kraftens representationslinje till bas*, ty momentet är $k.h$ och triangeln $\frac{kh}{2}$. Härav följer omedelbart:

Sats 1. En krafts statiska moment med avseende å en punkt ändras ej, om kraften med bibehållande av sin storlek och riktning förflyttas utefter sin riktningslinje.

Och

Sats 2. Resultanten till två krafter, som verka i samma räta linje, är en kraft som verkar utefter samma räta linje och är lika med de förras algebraiska summa.

Vi övergå nu till parallella krafter. Låt (fig. 1) AK och BL vara representanterna för två parallella krafter k och k_1, räknade positiva åt ena och negativa åt andra sidan om AB och låt deras resultant vara R.

Om denna skure t. ex. AK i C, så vore momentet med avseende å punkten C för såväl k som R lika med 0, och således skulle även momentet för k_1 eller triangeln CBL vara 0, vilket är orimligt. R måste således, om den över huvud existerar, vara parallell med k och k_1. Låt den då

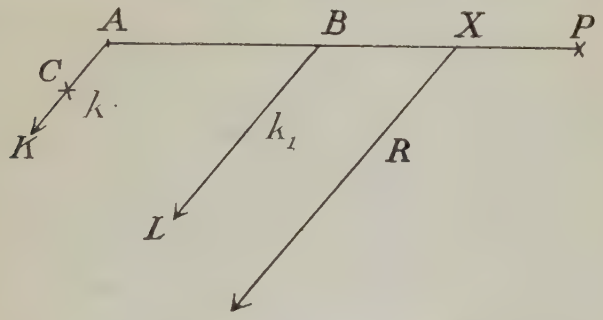


Fig. 1.

skära AB i X. Tagas då momenterna med avseende å punkten X, varvid AX och BX räknas positiva i riktningen AB, negativa i riktningen BA, så inses att $\triangle AKX + BLX$ måste vara $= 0$, och således $\frac{AX}{BX} = -\frac{BL}{AK} = -\frac{k_1}{k}$. Punkten X delar således AB i förhållandet $\frac{k_1}{k}$ och ligger på AB eller dess förlängning allt eftersom krafterna äro likartade eller motsattriktade. (Fig. således här felaktig, vilket gjorts för att ingen linje skall behöva läsas negativ.) Blott för det fall, att $k_1 = -k$ existerar ej punkten X, då det är omöjligt att AX och BX kunna vara lika till storlek och tecken.

För att finna storleken av R tagas momenten med avseende å punkterna A och B. Då erhålles

$$R \cdot AX = k_1 \cdot AB + k \cdot 0$$

och

$$R \cdot BX = -k \cdot AB + k_1 \cdot 0.$$

Således $R\,(AX - BX) = (k_1 + k)\,AB$
således $R = k_1 + k$.

Resultanten är således lika med krafternas algebraiska summa och verkar i den större kraftens riktning.

För att slutligen avgöra, om denna resultant verkligen existerar, så tag en godtycklig punkt P på AB eller dess förlängning. (Det är tydligen likgiltigt, om den tages utanför AB.) Då blir tydligen villkoret för resultantens existens att, hur P än väljes, $k \cdot AP + k_1 \cdot BP = (k + k_1)\,XP$.

Men emedan det förut är bevisat att (då ej $k + k_1 = 0$) $k \cdot AX + k_1 \cdot BX = 0$, så är, var än P ligger, $k\,(AX + XP) + k_1\,(BX + XP) = (k + k_1)\,XP$. Om således k ej är $= -k_1$, så är alltså R resultanten. Är däremot $k = -k_1$, så skulle ju enligt det föregående resultanten vara $= 0$, och då kan den ej, var den än anbringas, t. ex. med avseende å punkten A hava samma moment som kraften BL. I detta fall finnes sålunda ingen resultant, utan vi hava ett s. k. *kraftpar*, vars moment lätt bevisas vara lika med avseende å varje punkt i planet.

Vi hava således nu erhållit

Sats 3. Två parallella krafter k och k_1, anbragta i punkterna A och B hava ingen resultant om $k = -k_1$; i motsatt fall hava de en resultant $= k + k_1$, parallell med krafterna och anbragt i en punkt, som delar linjen AB i förhållandet $-\frac{k_1}{k}$.

För att nu övergå till frågan om divergerande krafter bevisa vi först följande geometriska

Hjälpsats: Om en punkt P sammanbindes med de fyra hörnpunkterna av en parallellogram $ABCD$, så är triangeln PAC lika med algebraiska summan av trianglarna PAB och PAD, varvid trianglarna räknas positiva om de stå åt ena sidan om PA och negativa om de stå åt den andra.

Ty dragas perpendiklarna BX, CY och DZ mot PA, och likaledes en perpendikel OT genom diagonalernas

skärningspunkt O, så inses lätt, att OT är halva algebraiska summan av BX och DZ, och således CY lika med denna algebraiska summa. Men CY, BX och DZ äro höjder i de ifrågavarande trianglarna, som alla hava gemensam bas PA, varav satsen följer.

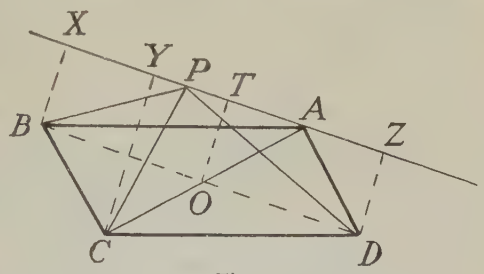


Fig. 2.

Av denna hjälpsats följer omedelbart genom utbyte av trianglar mot statiska moment

Sats 4. Resultanten till två krafter, vilkas riktningslinjer skära varandra, representeras av diagonalen i den parallellogram, som uppritas på krafternas representanter, förflyttade till skärningspunkten.

Slutligen behandla vi det fall, att de båda krafterna ej ligga i samma plan.

Låt krafterna vara AK och BL, verkande i punkterna A och B resp. och ej liggande i samma plan. Om en kraft X vore deras resultant, så skulle den med avseende å punkten A hava samma vridningsmoment som BL och således ligga i planet ABL. Tages momentet med avseende å punkten B, så visas att X skulle ligga i planet ABK. Den skulle således vara riktad utefter AB. Men detta är orimligt, emedan den då skulle få momentet 0 med avseende å A, under det att momentet av BL med avseende å A ej är $= 0$.

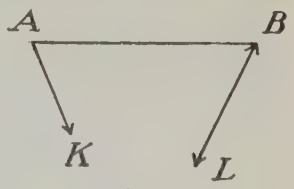


Fig. 3.

Vi få således

Sats 5. Två krafter, som ej ligga i samma plan hava ingen resultant.

Pendelstudium i första latinringen.

Av GUST. FORSSTRÖM.

Nedanstående rader hava skrivits för att visa, hur man med framgång kan angripa ett fysiskt spörsmål utan att äga speciellt därför avsedda apparater. I föreliggande fall har förf. kunnat nöja sig med en mindre vågskål, två vikter om 100 gr. och tre fina snören av olika längd.

Vågskålen upphängdes i ett av snörena, belastades med den ena vikten och fick utföra plana svängningar. Tiden för 50 enkla svängningar observerades av lärjungarna å deras egna fickur. Ur medelvärdet erhölls svängningstiden genom division med 50. Denna tid visade sig oberoende av utslaget, om detta var jämförelsevis litet, samt även oberoende av belastningen (100 gr. eller 200 gr.) men däremot beroende av pendelns längd (mätt på $\frac{1}{2}$ cm. när från upphängningspunkten till den på skålen ställda viktens ungefärliga mittpunkt). Vid ett lektionsförsök å härvarande flickgymnasium framgick följande resultat, där l betecknar pendellängden och t svängningstiden.

l (m.)	t (sek.)	$\frac{l}{t}$	$t - \frac{l}{t}$
0,325	0,58	0,56	+ 0,02
0,60	0,76	0,79	— 0,03
0,89	0,94	0,95	— 0,01

Av tabellens fyra kolumner drogos till en början blott de två första upp och ifylldes. Av dessa framgår, att l

ökar med t. Man förmodade direkt proportionalitet, och för den skull bildades tredje kolumnen, där $\frac{l}{t}$ i sådant fall bör vara konstant. Som synes, är detta ej fallet. På min fråga, om då ingen vidare slutsats kunde dragas ur tabellen, ville flera av flickorna (dock långtifrån alla!) yttra sig. Någon svarade: »t och $\frac{l}{t}$ är ju nästan lika». Detta föranledde oss att undersöka, hur mycket t skilde sig från $\frac{l}{t}$, d. v. s. utöka tabellen med kolumnen för $t - \frac{l}{t}$. Enär avvikelserna från noll i denna fjärde kolumn föllo inom felgränserna för t, ansågo vi oss berättigade att sätta

$$t - \frac{l}{t} = 0$$

eller

$$t = \sqrt{l}.$$

Denna empiriska formel jämfördes så med den teoretiska

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{9{,}82}} \sqrt{l},$$

som — självfallet — omnämndes utan bevis. Man erhöll

$$\frac{\pi}{\sqrt{9{,}82}} = \frac{3{,}14}{\sqrt{9{,}82}} = 1{,}003,$$

alltså en mycket god överensstämmelse med försöket.

Formeln $t = \sqrt{l}$ gav omedelbart 1 m. såsom värde på sekundpendelns längd, vartill knötos några ord om pendelns användning som regulator i ur. En praktisk tillämpning gjordes så på den vanliga, med lod drivna väggpendylen, vars »sekundpendel» man redan genom ett ögonkast övertygar sig om är betydligt kortare än 1 m. Motsägelsen måste bero på att ett dylikt ur icke — såsom man är benägen tro — knäpper sekunder, trots att dess

»sekundvisare» går ett steg för vart pendelknäpp eller pendelslag.

Vid lägligt tillfälle togo vi i okulär besiktning ett väggur av nämnda typ, som hängde i ett klassrum. Avståndet från pendelns vridningspunkt till pendelskivans mittpunkt uppmättes till $55\frac{1}{2}$ cm. På »sekundtavlan» funnos talen 15, 30, 45, 60 vid de punkter, som motsvarade $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ av periferin. Förbluffande nog befanns tiden för ett omlopp av visaren å denna tavla vara jämnt 60 sek., vadan enheten för de nämnda talen tydligen var 1 sek. Skulle således, i uppenbar strid mot våra föregående resultat, detta ur ändock äga sekundpendel? Gåtan löstes, då vi räknade antalet pendelslag pr min. och funno, att det var 80 och alltså pendelns svängningstid $\frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ sek. Härav beräknades pendellängden till 56 cm., som väl stämde med den direkt observerade.

I detta sammanhang påpekades för eleverna, att i Lunds h. a. läroverk fanns en väggpendyl, lik flickgymnasiets, men där talet 60 på lilla visartavlan angav antalet pendelknäpp för ett omlopp av visaren, vilket åter tog en tid av 45 sek. Pendelns svängningstid blev således $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ sek. eller densamma som nyss.

Ett par av flickorna hade de närmast föregående dagarna i sina bostäder studerat s. k. dalkarlsur eller golvur och funnit, att dessa göra skäl för namnet sekundpendelur, då pendeln var 1 m. lång och gjorde 60 knäpp på 1 min.

Den tid av omkring två timmar, som inalles offrades på pendelstudiet, torde ej kunna anses för dryg, då man besinnar, att lärjungarna därunder fått inhämta ett stycke verkligt fysikaliskt vetande med direkt anslutning till det praktiska livet på ett viktigt område, som latinlinjens övriga fysikkurs ej ger något tillfälle att beröra.

Lund i maj 1920.

Glödelektriska förstärkningsrör.

Av RAGNAR HOLM.

II.

§ 9. *Ur teorien för pleiotronen.*

Vi skola undersöka anodströmmen I_a som funktion av gallerspänningen E_g och, i ringare mån, av anodspänningen E_a, därvid potentialen hos ena ändan av K betraktas som nollpotential. Mestadels kan man försumma spänningsfallet inom K, som uppstår på grund av att ström drives genom tråden K för att upphetta denna. Verkan av detta spänningsfall bleve en rätt liten deformation av kurvorna i fig. 12. Någon principiell förändring av de följande teorierna föranleder det i alla händelser icke.

Antag till en början, att gallret i en pleiotron ersättes med en platta med potentialen p. Elektronströmmen från K till plattan (vi betrakta den som positiv ström från A till K liktydigt med en negativ yttre ström) blir

$$-I=f(p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

där f betecknar en viss funktion. Tages I till ordinata och p till abscissa, så blir I en sådan funktion av p, som framställes av kurvan I_a i fig. 12.[1] Strömmen börjar uppträda redan för smärre negativa potentialer p — beroende på, att elektronerna lämna K med vissa utgångshastigheter — och den stiger längs en osymmetriskt S-formad kurva upp till ett visst »mättnadsvärde» — på fig. 12 är mättnadsströmmen 5 *mA*. .

Betrakta nu det verkliga fallet med ett galler, vars potential är E_g. I maskornas öppningar härskar en annan

[1] Dylika kurvor, som nå upp till två olika mättnadsvärden, äro avbildade i fig. 1 till den nämnda föregående uppsatsen av förf.

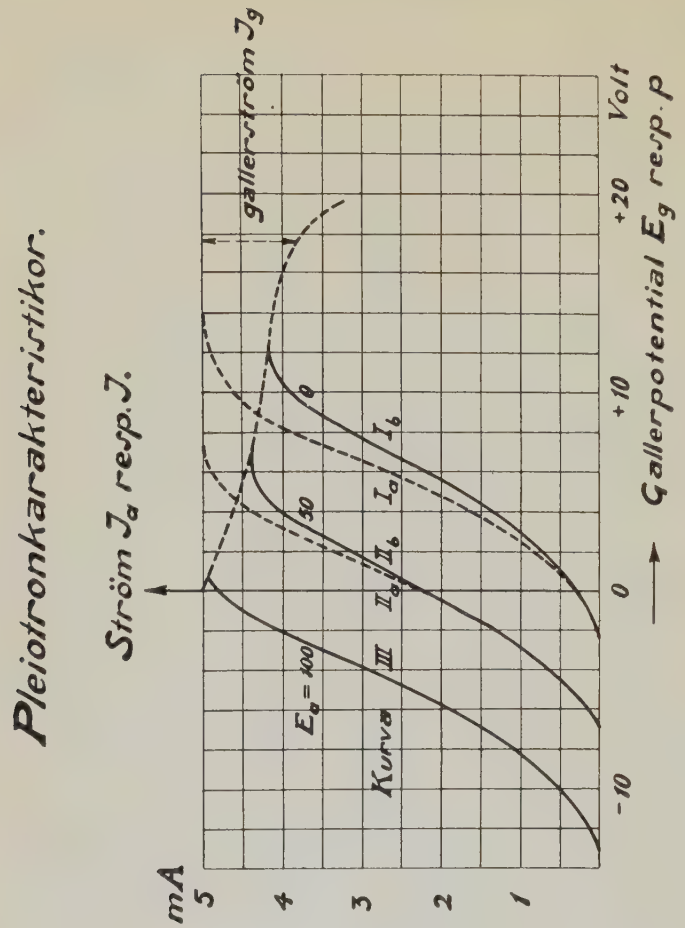


Fig. 12.

potential än E_g, beroende på att anodfältet där griper ned. Vi kunna emellertid, som Schottky och Abraham visat, beräkna fältet kring K och elektronströmmen från K så, som om uti gallrets plan härskade en medelpotential av formen

$$E_g + DE_a,$$

då D är en konstant, i huvudsak bestämd genom pleiotronens

geometriska dimensioner. Den från K utsugna strömmen blir alltså

$$-I=f(E_g+DE_a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

På fig. 12[1] visa de delvis streckade kurvorna I_a, II_a och III strömmen I som funktion av E_g. Till varje kurva hör ett konstant värde på E_a, vilket noterats bredvid kurvan i fråga på fig. 12.

Draga vi nu från totalströmmen I den vederbörande gallerströmmen I_g, så återstår den del av elektronströmmen, som når anoden, d. v. s. anodströmmen I_a. De utdragna kurvorna I_b, II_b och III på fig. 12 giva I_a för resp. $E_a=0$, 50 och 100 volt. Vid beräkningen av I_a för fig. 12 är antaget, att gallerströmmen är oberoende av E_a. Detta är noga taget ej fallet, men det begångna felet är obetydligt. Kurvorna I_b, II_b och III äro vad man vanligen kallar karakteristikor för pleiotronen i fråga. En *karakteristika* erhålles alltså, om man vid konstant E_a mäter I_a som en funktion av E_g. Fig. 12 visar, att karakteristikorna förskjutas åt negativt E_g-håll, när E_a ökas. Att så måste ske är lätt att förstå av formeln (2).

Den mellersta delen av en karakteristika kan betraktas som tillnärmelsevis rätlinig. Vi tänka oss att inom detta rätliniga gebit E_g varierar sinusformigt med en amplitud e_g. Samtidigt må I_a variera med amplituden i_a och E_a med amplituden e_a. Variationen hos E_a beror på, att vi mellan $+$-polen till batteriet B_a (se fig. 1) och A ha en transformator (resp. ett motstånd), vars klämspänning varierar med I_a. Enligt ekvation (2) måste nu gälla inom det rätliniga området

$$-i_a=S(e_g+De_a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

där S är en konstant, som anger karakteristikans branthet inom det ifrågavarande rätliniga området. Ekvationen (3) kan skrivas på följande sätt:

$$-\frac{1}{D}e_g=\frac{1}{SD}i_a+e_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

[1] Fig. 12 hänför sig icke till någon bestämd, undersökt pleiotron. Den är emellertid ritad i nära överensstämmelse med gjorda mätningar.

Denna ekvation har matematiskt fullkomligt samma karaktär som ekvationen för en generator med $EMK = -\frac{1}{D} \cdot e_g$, klämmspänningen e_a, och det inre motståndet $R_i = \frac{1}{SD}$.

e_a är just klämmspänningen hos anodtransformatorns primärledning. Vid beräkning ha vi rätt att underlätta våra föreställningar genom att betrakta $-\frac{1}{D} e_g$ som en *EMK* i pleiotronens anodkrets och $R = \frac{1}{SD}$ som inre motståndet i samma krets, ty enligt ekv. (4) spela vederbörande storheter ju matematiskt sett just den angivna rollen.

Ekvation (4) anger, huruledes pleiotronens anodkrets verkar som en generator, som ombildar energi från batteriet B_a till växelströmenergi. Den föranledes att verka så genom de spänningsvariationer, som inplantas på G, och som kunna betraktas som relativt svaga signaler, dem pleiotronen åtlyder.

Konstanterna S och D kunna bestämmas ur de statiska karakteristikorna.[1] Se vi t. ex. på fig. 12, så stiga där karakteristikorna i mittområdet ungefär med 1 *mA* för 2 volt E_g-förökning. Alltså är

$$S = \frac{10^{-3}}{2} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Vidare, om E_g behålles konstant men E_a ökas med 50 volt, så stiger I_a med ungefär 2,5 *mA*. Alltså är

$$-\frac{dI_a}{dE_a} = -\frac{di_a}{de_a} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3}}{50} = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Men enligt ekv. (3) är

$$-\frac{di_a}{de^a} = SD \text{ och alltså } SD = 5 \cdot 10^{-5}.$$

[1] Noggranna experiment ha konstaterat detta.

Ur dessa beräkningar följer för fallet fig. 12:

$$S = 5 \cdot 10^{-}$$
$$D = 0{,}1 .$$

Det inre motståndet $= \frac{1}{SD} = 20000$ ohm.

Engaller-pleiotroner för förstärkning av svaga telefonströmmar pläga ha

$$S = 10^{-4} \text{ till } 10^{-3}$$
$$D = 0{,}08 \text{ till } 0{,}15$$
$$\frac{1}{SD} = 10000 \text{ till } 200000.$$

Särskilt små värden på D och samtidigt stora värden på $\frac{1}{SD}$ kunna lämpligast erhållas i rör med två galler. På teorien för sådana skall här ej ingås.

En pleiotrons förstärkande förmåga är i särskilt hög grad beroende av gallertransformatorns beskaffenhet. Gallertransformatorn slukar nämligen i allmänhet huvudparten av den primära energien. Den måste likväl finnas, enär utan en sådan en än större del av primärenergien i allmänhet skulle reflekteras och på så sätt gå förlorad. Om förhållandet mellan den utsända och den till gallertransformatorn insända energien är α^2, så kallas α den lineära förstärkningen. Man kan bevisa, att α är givet av

$$\alpha = \frac{1000}{b}\sqrt{\frac{D}{S}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

där b beror av transformatorernas godhet, spec. av gallertransformatorn. I gynnsamma fall är ungefär

$$b = 2.$$

Karakteristikorna i fig. 12 leda till

$$\alpha = 16.$$

Vanligen är $\alpha = 10$ upp till 30.

Nämnas må, att medelspänningen plägar för olika mottagarpleiotroner vara:

E_g med.=0 ned till —6 volt.
E_a med.=30 upp till 200 volt.

Som ovan påpekades, är det av vikt att få I_g med. lika med noll eller åtminstone mycket liten. Vi se, att man kan förlägga den brukbara delen av krakteristikan till negativt E_g-område genom att taga DE_a tillräckligt stort. Sker detta endast genom ökning av E_a, alltså med konstant D, d. v. s. konstanta pleiotrondimensioner, så minskas ej S. Därpå beror (jfr ekv. (5) här ovan), att förskjutningen ej medför någon förlust hos förstärkningsförmågan utan endast den vinst för denna, som beror på att I_g försvinner. Emellertid brukar man, som redan framhållits, välja E_a så litet som det ännu med fördel kan tagas; detta för att man skall kunna reda sig med möjligast små anodbatterier.

Pleiotroner med ett andra galler, ett s. k. skyddsgaller framför anoden, kunna arbeta med särskilt låg anodspänning. På deras teori skall här ej ingås.

Den grundligare teoretiskt intresserade hänvisas framför allt till följande utförliga avhandlingar:

W. Schottky, Archiv für Elektrotechnik. Bd 8, s. 1, 12 och 299 år 1919.

H. Rukop, Jahrbuch der drahtl. Telegr. Bd 14, s. 110, år 1919.

En utförligare uppsats av förf. föreligger i teknisk bilaga till Kgl. telegrafstyrelsens cirkulär för jan. och febr. 1919.

Demonstrationsförsök över luftens jonisering.

AV B. BERGGREN.

Den försöksanordning, som här kommer att anges, var ursprungligen avsedd att användas vid mätning av vindstyrkan i en vindtunnel. Då jag emellertid senare funnit densamma lämplig för demonstration på gymnasial-

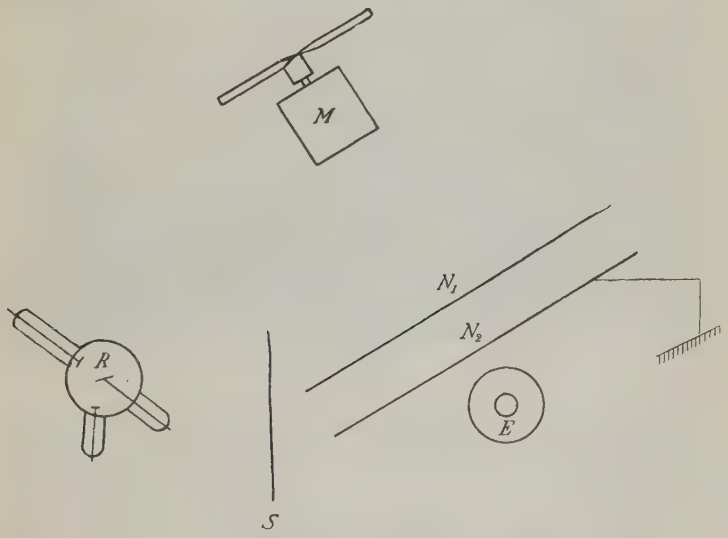


Fig. 1.

stadiet av några grundläggande fakta rörande joniseringen i gaser, vill jag här lämna en kort resumé av metoden.

Fig. 1 visar ett schema över uppställningen. *R* är ett mindre röntgenrör av vanlig skoltyp matat med ström

från gnistinduktor eller influensmaskin. S är en metallplåt med uppgift att avskärma elektroskopet E från röntgenstrålarnas direkta påverkan. M är en liten elektrisk motor, på vars axel är anbragt en propellerfläkt. Den senare kan lätt improviseras av ett skevt metallbleck, som fastspikas i en kork. N_1 och N_2 äro två stycken metalltrådsnät, av vilka N_1 är isolerat (t. ex. genom underlag av parafinplattor, upphängning i silkestrådar el. a. s.), N_2 är förbundet med jorden.

Fig. 2 visar apparaterna och anordningen vid försökets utförande å Motala samgymnasium.

Fig. 2.

1. *Röntgenstrålar urladda elektroskopet.*

Plåten S borttages och röntgenstrålarna få falla direkt på E.

2. *Orsaken är att söka i en förändring i luften.*

Anordning som i fig. 1. Ingen inverkan erhålles på E, förrän fläkten sättes i gång och driver den av strålarna träffade luften förbi E.

3. *Denna förändring består i uppkomsten av elektriskt laddade partiklar.*

N_1 laddas med samma slags elektricitet som E (lämpligen genom att förbindas med en laddad leydnerflaska). N_2 skyddar härvid E för influensverkan från N_1. Den joniserade luftströmmen har nu ingen inverkan å E, förrän N_1 urladdas genom vidröring.

4. *Både positiva och negativa joner finnas i den bestrålade luften.*

Försök 3 upprepas med motsatt laddning å såväl N_1 som E.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälan.

K. Fajans. *Radioaktivität und die neueste Entwicklung der Lehre von den Chemischen Elementen.* (Samml. Vieweg n:r 45, 107 sid.)

Monografier äro en välsignelse, om de ej äro onödigt populärt skrivna. De böra ej söka att nå alla kretsar, endast dem, som hysa ett naturligt intresse för facket. Med vår tids specialisering och snabba framåtskridande måste även vetenskapsmannen utom det egna området ta sin tillflykt till dessa sammanfattningar.

Under ovan anförda rubrik har en bland den radioaktiva forskningens mest bekanta män lämnat oss en sådan verkligt värdefull, sammanfattande överblick. Naturligtvis huvudsakligen från kemisk synpunkt. Det följer av namnet *K. Fajans.* Vi få följa de radioaktiva upptäckterna ända från början och få en inblick i den vardande atomkemien — överkemien — som *K. A. Hofmann* betecknande kallat den. Vi komma mysteriet bakom *Mendeljeffs* periodiska system inpå livet och nödgas ta den gamla *Prout*'ska idén från 1815 om vätet som urgrundämne till omprövning. Dess resultat: Prout kommer till heders, vätet är i likhet med helium ett av urämnena! *Rutherford* har visat det genom sin epokgörande upptäckt, att kvävet kan uppdelas i enklare ämnen *på konstgjord väg.* Detta är den första »alkemistiska» reaktionen, den första med konst framkallade elementomvandlingen. Men så har också därvid använts den starkaste energikälla som står till vårt förfogande. Kväveatomen sköts sönder med α-partiklar.

Experimentet är så mycket intressantare som man redan förut anat att kunna påverka det till synes oåtkomliga atomsönderfallet, om blott några hundra tusen gånger intensivare energikällor än våra vanliga låge inom vår räckvidd.

J. Arvid Hedvall.

Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg.

Programme des cours en 1920—21.

En outre des cours fondamentaux sur les Mathématiques genérales, le Calcul Différentiel et Intégral, la Mecanique rationnelle et l'Astronomie, cours qui s'adressent aux étudiants de première, deuxième et troisième année, l'Institut de Mathématiques de Strasbourg a organisé pour les candidats au diplôme d'études supérieures et au doctorat, et pour chercheurs en général, un ensemble assez important de cours de recherches, dont le programme est renouvelé chaque année. Nous donnons ci-dessous ce programme pour 1920—21. En outre, des colloques mathématiques, réuniront au moins une fois par mois, professeurs et étudiants.

Cours de recherches seulement.

1^er^ Semestre 1920—21 (1^er^ Nov.—28 Février):

Physique Mathématique, M. Bauer: Théorie des Quantas. Constitution des atomes: 3 cours par semaine.

Analyse Supérieure, M. Fréchet: Éléments de Calcul des Probabilités: 2 cours par semaine. Notions sur les équations intégrales: 1 cours par semaine.

2^e^ Semestre 1921 (1^er^ Mars—20 Juin):

Physique Mathématique, M. Bauer: Applications statistiques de la théorie des quanta: 3 cours par semaine.

Analyse Supérieure, M. Fréchet: Application du Calcul des Probabilités: 1 cours par semaine. Fonctions de lignes: 2 cours par semaine.

Hydrodynamique, M. Villat: Recherches sur le mouvement d'un solide dans un fluide visqueux: 2 cours par semaine.

Géométrie infinitesimale, M. Pérès: Les transformations des surfaces applicables: 2 cours par semaine.

Théorie des fonctions, M. Valiron: Séries de Dirichlet et de factorielles: 2 cours par semaine.

Pour tous renseignements complémentaires écrire à *Monsieur le Directeur de l'Institut de Matématiques, 2 Quai Jacoutot, Robertsau, Bas-Rhin, France,* ou (en ce qui concerne les pensions, les logements etc.): *Comité de Patronage des étudiants étrangers, Université, Strasbourg, France.*

Ett slutord i diskussionen om »Linsformeln och dess härledning».

Egentligen hade jag tänkt ingå i utförligare svaromål å läroverksadj. Bloms senaste inlägg i ovanstående fråga (denna tidskr., 3 årg., sid. 238—240). Men då jag respekterar red:s till mig uttalade åsikt, att saken nu kan anses tämligen utdebatterad, skall jag upptaga tidskriftens utrymme endast för att bemöta en punkt, där jag blivit direkt angripen.

B. skriver (sid. 238): »Det av lektor Forsström i förestående artikel påpekade felet i min uppsats om linsformeln är uppenbart. Lektor F:s påstående, att beviset för brytningen i en sfärisk gränsyta härmed skulle falla, är däremot oriktigt.»

Något dylikt påstående skulle det aldrig falla mig in att göra och har jag ej heller gjort. Den som kan läsa rätt innantill finner, att jag yttrat mig underkännande endast om B:s bevis för att centrala strålar brytas ihop

mindre kraftigt än randstrålar. Detta är ju något helt annat, än vad B. beskyller mig för.

Lund i juni 1920.

Gust. Forsström.

Matematiska uppgifter.

73) I en rätvinklig triangel är hypotenusan a, kateterna b och c. Sök avstånden mellan de vidskrivna cirklarnas medelpunkter samt mellan dessa och den inskrivna cirkelns medelpunkt. *C. H.*

74) Om $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$, så satisfieras systemet endast av 0-värden på två av de obekanta och 1 på den tredje. *S. B—n.*

75) Varpå beror följande motsägelse:

Sättes $x=\sqrt[3]{1+i}+\sqrt[3]{1-i}$, så är

$$x=\left[\sqrt{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}\right]^{1/3}+\left[\sqrt{2}\cdot e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+2k_1\pi\right)}\right]^{1/3}=$$

$$=2^{1/6}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k_1\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k_1\pi}{3}\right)\right\}=$$

$$=2^{1/6}\cdot 2\cdot\left\{\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{(k+k_1)\pi}{3}\right)\cos\frac{(k-k_1)\pi}{3}+\right.$$

$$\left.+i\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{(k+k_1)\pi}{3}\right)\sin\frac{(k-k_1)\pi}{3}\right\}=$$

$$=2^{7/6}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{(k+k_1)\pi}{3}\right)\left\{\cos\frac{(k-k_1)\pi}{3}+\right.$$

$$\left.+i\sin\frac{(k-k_1)\pi}{3}\right\}=$$

$$=2^{7/6}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{3}\right)\left\{\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right\}=$$

$$=2^{7/6}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{3}\right)\sqrt[6]{1},$$

således 18 värden, nämligen 3 olika moduler, de positiva av $2^{7/8}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{m\pi}{3}\right)$ och vardera multiplicerad med de 6 värdena av $\sqrt[6]{1}$, under det att $\sqrt[3]{1+i}$ och $\sqrt[3]{1-i}$ vardera blott hava 3 värden, således x blott 9 värden. *M—r.*

76) Bestäm a och b så, att funktionen $\frac{x^2+1}{2ax+3b}$ har ett maximum $=-1$ och ett minimum $=1/4$. *S. B—n.*

77) Att konstruera en triangel, då man känner rektangeln av två sidor samt längderna av inre och yttre bissektriserna till mellanliggande vinkel. *X.*

78) c_0, c_1, c_2, . . . c_n äro koefficienterna vid utvecklingen av $(a+b)^n$. Bevisa att

$$c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\ \ldots\ +(-1)^n\frac{c_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

Lösningar till uppgifterna i h. 3. 1919—20.

61) *Basen i en likbent triangel är harmoniska mediet mellan benet och höjden. Hur stora äro vinklarna?*

Kallas basen b, benet a, höjden h och basvinkeln α, fås genast $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{h}$ eller $\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}=1$

eller $$\sin\alpha\ \cos\alpha=\sin\alpha-\cos\alpha.$$

Denna ekv. kan lösas på flera sätt. Då α måste vara $<\frac{\pi}{2}$, så finnes intet skäl att undvika kvadrering, och vi få

$$\sin^2 2\alpha=4(1-\sin 2\alpha),$$

varav $\alpha_1=27°,98$, $\alpha_2=62°,02$, där α_2 är basvinkeln och α_1 blir halva vinkeln vid spetsen.

(Löst av *C. H.* och *X.*)

62) *Om i en rätvinklig triangel med hypotenusan a och kateterna b och c man har* $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{m}{a}$, *bestäm gränserna för m.*

Kallas basvinkeln mot b för β, så fås genast

$$m=\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\cos\beta},$$

varav $$\frac{dm}{d\beta}=-\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}=\frac{\sin^3\beta-\cos^3\beta}{\sin^2\beta\cos^2\beta}=$$

$$=\frac{(\sin\beta-\cos\beta)(\sin^2\beta+\sin\beta\cos\beta+\cos^2\beta)}{\sin^2\beta\cos^2\beta}.$$

Således enda möjliga extremvärde $\beta=45°$.

$\frac{d^2m}{d\beta^2}$ är tydligen till tecknet lika med täljarens derivata

$$3\sin^2\beta\cos\beta+3\cos^2\beta\sin\beta,$$

vadan m har ett minimum då triangeln är likbent.

(Inga lösningar inkomna.)

63) *Att upprita en parabel, då axeln och två punkter på kurvan äro givna.*

I. Det är tillräckligt att konstruera brännpunkten. Om a är den givna axeln, A, B de givna punkterna, tillhöra de symmetriska punkterna A_1, B_1 även parabeln. Man kan därför antaga, att A och B ligga på samma sida om a och B längst från a. Råka AA_1, BB_1 a i N, M resp., inser man med hjälp av styrlinjen, att brännpunkten F bestämmes av $FB-FA=NM$. Därav konstruktionen:

Upprita den cirkel (C), som har sitt centrum i B och tangerar AA_1; lägg vidare en cirkel (C') genom A och A_1, som skär C. Gemensamma kordan skär AA_1 i P. Drag den återstående tangenten PT till C (den andra tangenten faller ju samman med AA_1). Då skär BT ut den sökta brännpunkten på a. Då $PT^2=PA\cdot PA_1$ finnes nämligen en cirkel genom A och A_1, som tangerar C i T. Denna cirkel har sitt centrum i F. Således är $FB-FA=BT=NM$ h. s. g.

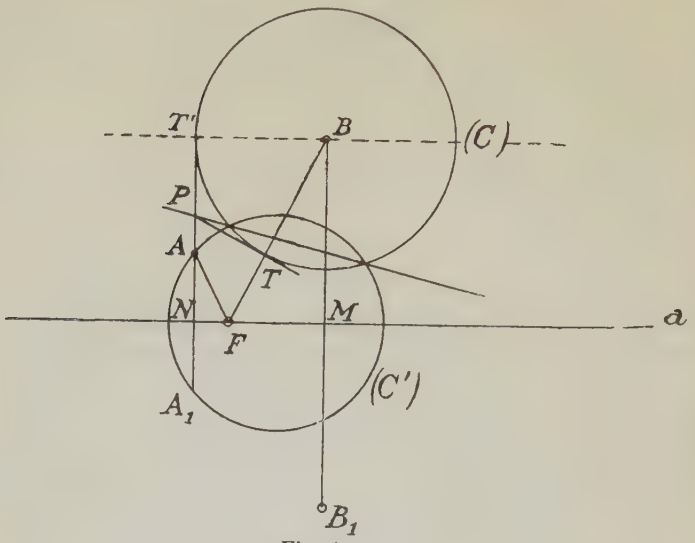


Fig. 1.

Anm 1. Den andra tangenten PT' ger på samma sätt upphov till linjen $BT' \parallel a$. Denna linje kan anses utskära parabelns andra brännpunkt, som ju måste anses ligga i axelns oändlighetspunkt.

Anm 2. Man kan välja vilken som helst av A, A_1, B, B_1 till A och sedan endera av de återstående med A icke symmetriska punkterna till B. Konstruktionen leder alltid till samma, entydigt bestämda F.

Anm. 3. På fullständigt analogt sätt löser man uppgiften:

Att konstruera ett kägelsnitt, då focalaxeln, två punkter och excentriciteten **e** *äro givna.*

Enda skillnaden är att radien i cirkeln C, då skall vara $e \cdot MN$. BT och BT' utskära foci F och F' på axeln. I hyperbelfallet, $e > 1$, tillkommer möjlighetsvillkoret: A och A_1 skola ligga antingen bägge utanför eller bägge innanför C. En lösn. och samma godtycke i valet av A, B.

II. Man konstruerar först toppen. Sedan kan man konstruera brännpunkten på flera sätt, t. ex. enligt satsen:

Det stycke av en tangent till en parabel, som ligger mellan kontaktpunkten och skärningspunkten med axeln, har sin mittpunkt på topptangenten, och mittpunktsnormalen går genom brännpunkten. Toppen erhålles så: A, B de givna punkterna, A_1 den med avseende på axeln a med A symmetriska punkten. BA, BA_1 skära a i L, L_1 resp. Då är

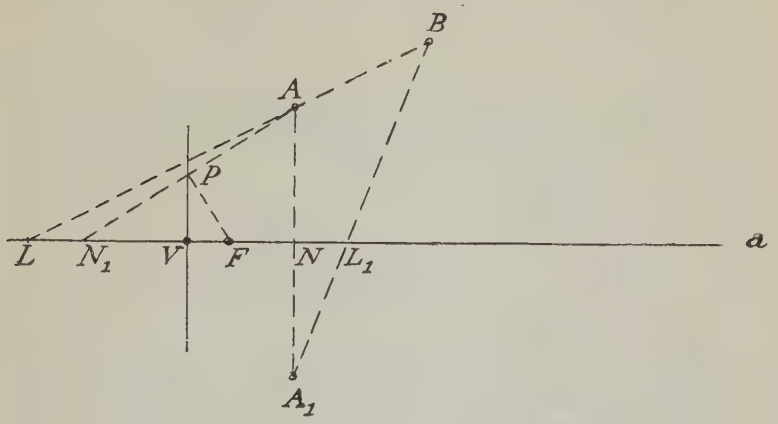


Fig. 2.

toppen V mittpunkten till LL_1. Om vidare $VN_1 = VN$, är AN_1 tangenten i A. Denna skär topptangenten i P och $PF \perp AN_1$ ger brännpunkten. Att toppen ligger mitt emellan L och L_1 kan lätt verifieras analytiskt-geometriskt. Det följer även enkelt ur pol- och polarteorien. *X.*

(Även löst av *S. Ngn.*)

64) *En sned cirkulär kon har basradien r och axeln l, vilken med basplanet gör vinkeln α. Bestäm vinkeln mellan generatriserna i det axelsnitt, som står på en diameter som gör vinkeln v med axelns projektion.*

Kallas generatriserna i det axelsnitt som innehåller den sökta vinkeln φ för x och y $(x < y)$ samt basen i den triangel vars sidor äro x och perpendikeln från spetsen mot basplanet för z, så fås

$$x^2 = l^2 \sin^2 \alpha + z^2 = l^2 \sin^2 \alpha + l^2 \cos^2 \alpha + r^2 - 2rl \cos \alpha \cos v =$$
$$= l^2 + r^2 - 2rl \cos \alpha \cos v,$$

och på samma sätt

$$y^2 = l^2 + r^2 + 2rl \cos\alpha \cos v,$$

men $$4r^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos\varphi,$$

således $$\cos\varphi = \frac{l^2 - r^2}{\pm\sqrt{(l^2+r^2)^2 - 4l^2r^2\cos^2\alpha\cos^2 v}},$$

varav $$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{4r^2l^2(1-\cos^2\alpha\cos^2 v)}{(l^2-r^2)^2}.$$

Tecknet vid rotutdragningen fås ur den lätt insedda satsen, att vinkeln vid spetsen i en triangel med basen $2r$ och medianen l är $\gtreqless \frac{\pi}{2}$ allt eftersom $r \gtreqless l$. Man får således alltid

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2rl\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2 v}}{l^2-r^2}.$$

Om $l > r$ växer den spetsiga vinkeln φ kontinuerligt från $\operatorname{arctg}\frac{2rl\sin\alpha}{l^2-r^2}$ till $\operatorname{arctg}\frac{2rl}{l^2-r^2}$, när v ökas från 0 till $\frac{\pi}{2}$, för $l < r$ minskas den trubbiga vinkeln på motsvarande sätt.

(Löst av *S. Ngn.*)

65) *Från en punkt P på avståndet a från medelpunkten O till en cirkel med radien r drages en sekant PAB. PO eller dess förlängning råkar cirkeln i D. Sök maximum och minimum för* $\triangle DAB$.

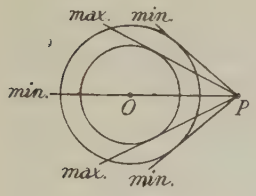
Ytorna av trianglarna *DAB* och *OAB* stå i det konstanta förhållandet *PD : PO*. Man kan därför, om *P* ej ligger i *O*, i stället undersöka variationen av den senare triangelns area, då *AB* vrider sig kring *P*. Arean av triangeln *AOB* beror endast av $\sphericalangle AOB$ och kan bli extremum på två sätt:

1:o) $\sphericalangle AOB$ är extremum,

2:o) $\sphericalangle AOB = 90°$.

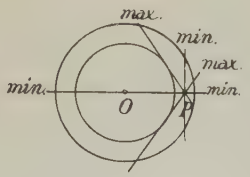
$\sphericalangle AOB$ avtar monotont, då avståndet från *O* till *AB* växer monotont. Då *AB* går genom en fix punkt *P*, är detta avstånd en korda i den cirkel, som har *OP*

till diameter och man ser genast hur detsamma varierar. $\wedge AOB = 90°$, då AB tangerar en med den givna koncentrisk cirkel, som har radien $\frac{r}{\sqrt{2}}$. Man kan då genast utskriva resultatet, som figurerna ange.



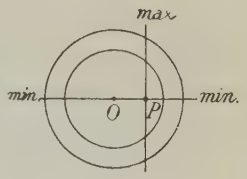
$a > r$

Fig. 3.



$\frac{r}{\sqrt{2}} < a < r$

Fig. 4.



$a < \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Fig. 5.

X.

(Även löst av *S. B—n* och delvis av *S. Ngn.*)

66) *Bevisa a) att kortaste avståndet från en punkt inom en cirkel till periferin i genomsnitt är en tredjedel av radien, och b) att kortaste avståndet från en punkt inom en triangel till omkretsen i genomsnitt är en tredjedel av den inskrivna cirkelns radie.*

a) Läggas, koncentriskt med den givna cirkeln, cirklar med radierna x och $x+dx$, så äro punkternas antal inom cirkelringen och inom hela cirkeln proportionella mot dessa ytors storlek. Men avståndet från varje punkt inom cirkelringen till periferin är (på oändligt små kvantiteter när) $= r - x$. Det sökta medelvärdet är således:

$$\int_0^r \frac{2\pi x dx (r-x)}{\pi r^2} = \int_0^r \left(\frac{2x dx}{r} - \frac{2x^2 dx}{r^2} \right) = r - \frac{2r}{3} = \frac{r}{3}.$$

b) Betraktas triangeln OBC, där O är den i $\triangle ABC$ inskrivna cirkelns medelpunkt, och lägges i densamma linjer parallella med a på avstånden x och $x+dx$ från O, så är, enligt samma resonemang som i *a*), denna triangels

punkters medelavstånd från linjen a:

$$\int_0^r \frac{\frac{ax}{r}\,dx\,(r-x)}{\frac{ar}{2}} = \int_0^r \frac{2x\,dx\,(r-x)}{r^2} = r - \frac{2r}{3} = \frac{r}{3}.$$

Samma blir förhållandet med punkternas i trianglarna *OCA* och *OAB* medelavstånd från sidorna b och c resp. Men dessa avstånd äro tydligen punkternas minsta avstånd från triangelns omkrets.

Anm. På samma sätt bevisas satsen, om i stället för en triangel sättes en kring en cirkel omskriven rätlinig figur, vilken som helst. (Löst av *S. B—n* och *W. J.*)

Prisuppgift för årgången 1920—21.

Bestäm halten av ren bariumsuperoxid i ett handelspreparat av detta ämne.

Anvisningar: Provet skall efter anskaffandet göras så homogent som möjligt och förvaras i burk med glaspropp eller god kork. Sedan analysen avslutats, skall burken, innehållande minst 10 g av ämnet, förseglas och etiketterad bifogas tävlingsskriften. Efter prisbedömningen återställes densamma.

Tävlingsskriften skall innehålla en noggrann och detaljerad redogörelse för använda metoder och resultat. Halten av de titreringsvätskor, som ev. komma till användning, skall av den tävlande själv bestämmas och redogörelse härför ingå i tävlingsskriften.

Tävlan står öppen för alla lärjungar vid allmänna läroverk, seminarier, tekniska skolor och med dem jämnställda enskilda läroverk. Tävlingsskrift skall vara till Red. insänd före d. 1 mars 1921. Två lärjungar kunna gemensamt insända tävlingsskrift. Tre pris, bestående av värdefulla arbeten i kemi eller fysik, utdelas, om lämpliga tävlingsskrifter inkomma.

Vår Prisuppgift i årgången 1919—20. Pristagarens lösning.

Uppgiften lydde: Talet 1001001001001 är divisibelt med 11111. Angiv en så generell regel som möjligt, av vilken ovanstående är ett specialfall.

I föreliggande problem kan man lämpligen använda sig av följande regel för undersökning av tals delbarhet med andra, bestående av endast ettor. (Tal av denna sistnämnda beskaffenhet kunna, om antalet ettor är n, tecknas $\frac{10^n-1}{9}$.) Talet, som skall undersökas, uppdelas från slutet i avdelningar om n siffror. Är då summan av dessa avdelningar jämnt delbar med $\frac{10^n-1}{9}$, är så fallet även med det ursprungliga talet. Antages nämligen att avdelningarna äro

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_p,$$

kan talet skrivas:

$$a_0+10^n a_1+10^{2n}a_2+\ldots\ldots 10^{pn}a_p=$$
$$=a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots a_p+(10^n-1)a_1+(10^{2n}-1)a_2+$$
$$+\ldots\ldots(10^{pn}-1)a_p.$$

Ett tal av formen $(10^{pn}-1)$ är emellertid divisibelt med (10^n-1) då p och n, såsom här är fallet, äro hela tal.

$$\left(\frac{10^{pn}-1}{10^n-1}=1+10^n+10^{2n}+\ldots\ldots 10^{(p-1)n}\right).$$

Innehåller summan $a_0+a_1+a_2+\ldots\ldots a_p$ den hela faktorn $\frac{10^n-1}{9}$, tillkommer därför denna egenskap också det ursprungliga talet. Även inses härav omvändningen: innehåller den nämnda summan icke den hela faktorn $\frac{10^n-1}{9}$, är ej heller det undersökta talet divisibelt med $\frac{10^n-1}{9}$.

Det i problemet angivna talet, som är divisibelt med talet $11111 = \left(\frac{10^5 - 1}{9}\right)$, och som kan skrivas 001001001001001, kan uppfattas såsom sammansatt av 5 perioder, var och en bestående av 2 nollor och en etta. I det följande skall visas, när ett tal, sammansatt av n perioder om k siffror, är divisibelt med talet $\frac{10^n - 1}{9}$, i det fall då perioderna såsom i det givna exemplet utgöras av ett antal nollor och en etta.

Uppdelar man talet i avdelningar om n siffror, inses, att först när man avsatt så många avdelningar, att, om antalet av dessa är v, $\frac{n \cdot v}{k}$ är ett helt tal, blir den följande avdelningen, om talet ej är slut, likadan som någon av de övriga, nämligen som den första. $\left(\frac{n \cdot v}{k}\right.$ är tydligtvis antalet perioder i den del av talet, som blivit uppdelad.) Ett undantag måste dock göras för avdelningar av uteslutande nollor om $k > n+1$, ty en sådan avdelnings läge är obestämt i den period, inom vilken den faller, vadan mer än en avdelning av uteslutande nollor kan hava erhållits.

I talet finnes kn siffror. När man avsatt k avdelningar, är talet således fullständigt uppdelat, och om k och n ej ha någon faktor gemensam, kan $\frac{n \cdot v}{k}$ ej bli ett helt tal, förrän $v = k$. Om man bortser från avdelningar, som blott bestå av nollor, komma alltså alla avdelningarna i det fullständigt uppdelade talet att vara olika, om k och n ej ha någon faktor gemensam. Då dessutom perioderna äro varandra lika, kan det icke finnas två ettor med samma läge i förhållande till övriga siffror i de resp. avdelningar de tillhöra, ty då skulle dessa avdelningar nödvändigt bli lika. Det finnes precis n ettor i talet. Läggas avdelningarna tillsammans, erhålles därför talet $\frac{10^n - 1}{9}$. (Avdel-

ningar av blott nollor ha vid denna summering naturligtvis ingenting att betyda.) Enligt den nyss bevisade satsen är således det ursprungliga talet delbart med $\frac{10^n - 1}{9}$.

Ha återigen k och n någon faktor gemensam, blir alltid $\frac{n \cdot v}{k}$ ett helt tal, innan v blivit så stort som k, d. v. s. innan talet är fullständigt uppdelat. Då det nu i talet blott finnas n ettor, kunna avdelningarna sammanlagda aldrig bilda talet $\frac{10^n - 1}{9}$, (och naturligtvis ej heller en multipel därav). Om k och n ha någon faktor gemensam, är alltså det ursprungliga talet icke delbart med $\frac{10^n - 1}{9}$.

Ett tal, sammansatt av n perioder om k siffror, kan, om alla siffrorna i perioden äro nollor utom den sista, som är en etta, skrivas under formen:

$$1 + 10^k + 10^{2k} + \ldots\ldots 10^{(n-1)k}.$$

Denna series summa är $\frac{10^{kn} - 1}{10^k - 1}$, vilket tals delbarhet med $\frac{10^n - 1}{9}$ det gällde att undersöka. Enligt ovanstående är alltså $\frac{(10^{kn} - 1)\,9}{(10^k - 1)(10^n - 1)}$ ett helt tal, om k och n icke ha någon faktor gemensam, men ej ett helt tal om k och n ha någon faktor gemensam.

Ole Albert Lamm.

*

Såsom synes, är ovanstående behandling fullt korrekt, men bristen i generaliseringen består i att förf. bibehållit kvoten 10 i den geometriska serie varav nämnaren består, under det att den lika väl kan vara vilket helt tal som helst. Vi få således såsom en vidsträcktare generalisering följande sats:

Om till divisor tages summan av en geometrisk serie av n termer, där kvoten är ett helt tal, och till dividend summan av en dylik serie, där varje term är m^{te} potensen av motsvarande term i den förra, så går divisionen jämnt upp, om m och n äro relativa primtal.

Eller med andra ord:

Ett periodiskt tal av n perioder, vardera innehållande m siffror, av vilka de m — 1 första äro nollor, och skrivet i vilket talsystem som hälst, är alltid divisibelt med det tal som fås om nollorna strykas, såvida m och n äro relativa primtal.

Så t. ex. är i vilket talsystem som hälst talet 11 divisor till 1001, 100001, 10000001, 1000000001 o. s. v.; talet 111 divisor till 10101, 100010001, 10000100001, 100000010000001 o. s. v.; talet 1111 divisor till 1001001001, 1000010000100001, 100000010000010000001 o. s. v.

Tillämpas detta t. ex. på 2-, 3-, 4- och 5-systemen, så fås:

Med 3 (11 i 2-systemet) äro divisibla talen 9, 33, 66, 258 o. s. v.
» 4 (11 » 3- ») äro divisibla talen 28, 244, 2188, 19684 o. s. v.
» 5 (11 » 4- ») äro divisibla talen 65, 1025, 16385, 262145 o. s. v.
» 6 (11 » 5- ») äro divisibla talen 126, 3126, 78126, 1953126 o. s. v.
» 7 (111 » 2- ») äro divisibla talen 21, 273, 546, 16513 o. s. v.
» 13 (111 » 3- ») äro divisibla talen 91, 6643, 59293, 368089 o. s. v.
» 21 (111 » 4- ») äro divisibla talen 273, 65793, 1049601, 268451841 o. s. v.
» 31 (111 » 5- ») äro divisibla talen 651, 391251, 9768751, 6103593751 o. s. v.

Red.

Om generalisering av problem.

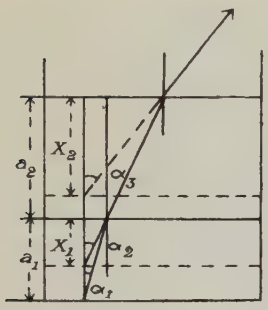
Av C. F. RYDBERG.

Vid jämförelse mellan uppgifterna i matematik och fysik i den skriftliga studentexamen i Sverige med motsvarande för »les candidats au baccalauréat» i Frankrike faller det särskilt i ögonen hur mycket allmännare hållna än våra de franska uppgifterna ofta äro. Det är mycket vanligt, att examinanden ålägges att ur vissa bokstavsdata härleda ett generellt resultat, vidare att underkasta resultatet diskussion och slutligen eventuellt tillämpa det på ett numeriskt exempel. Våra uppgifter gälla däremot i allmänhet något konkret fall. Men, så långt min erfarenhet sträcker sig, är det ytterligt sällsynt, att någon lärjunge höjer sig från det speciella fallet till det allmänna, när det icke uttryckligen begäres. Utan tvivel vore det en icke önskvärd skärpning i fordringarna, om uppgifterna mera genomgående bleve av sådan allmännare art. Men nog vore det önskvärt, att dylika uppgifter icke så sällan förelades examinanderna, ty just vid behandlingen av sådana har den verkliga begåvningen tillfälle att göra sig gällande. Det förnämsta värdet av den generella behandlingen av en uppgift ligger emellertid i den djupare inblick i sammanhanget, den skänker; och lyckas det så att åt resultatet giva en enkel, överskådlig form, så erfar lösaren en tillfredsställelse, som aldrig behandlandet av ett speciellt fall kan skänka, tillfredsställelsen att ha trängt till bottnen i en fråga och att ha funnit en allmängiltig lag.

Jag kom på dessa tankar, när jag tog itu med lösandet av fysikstudentuppgifterna förliden hösttermin. Den sista av dessa uppgifter är av den art, att den särdeles väl lämpar

sig för generalisering. Den lyder: *I en bägare har man ifyllt kolsvavla till en höjd av 10 cm. och däröver vatten till samma höjd. Hur mycket upplyftad synes bägarens botten för ett öga, som ser lodrätt nedåt? Brytningsexponenten från luft till kolsvavla är $^5/_3$ och från luft till vatten $^4/_3$.*

Den första generalisationen består i att antaga tjockleken av respektive brytande vätskelager vara a_1 och a_2 samt brytningsexponenterna från luft till nämnda medier n_1 och n_2. Om x_1 betecknar bottnens skenbara avstånd från gränsytan mellan de båda medierna, då den betraktas av ett öga i det övre vätskelagret, om vidare med α_1 och α_2 betecknas den infallande och den brutna strålens vinklar med normalen till gränsytan i respektive medier, så erhålles ur vidstående figur med stöd av brytningslagen för små vinklar följande ekvation:



$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{x_1}{a_1}$$

varav

$$x_1 = \frac{n_2}{n_1} \cdot a_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Tillämpas denna ekvation vid gränsytan mellan det andra vätskelagret och luften, då med x_2 betecknas bildpunktens avstånd från nämnda gränsyta, fås på samma sätt

$$x_2 = \frac{1}{n_2}(x_1 + a_2)$$

alltså med stöd av (1)

$$x_2 = \frac{a_1}{n_1} + \frac{a_2}{n_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

I det givna specialfallet fås

$$x = \frac{10}{^5/_3} + \frac{10}{^4/_3} = 13{,}5.$$

Bottnen synes således upplyftad 6,5 cm.

Det vunna resultatet kan nu med lätthet generaliseras. Antag, att på varandra vila n vågräta vätskelager, vilkas tjocklek äro resp. a_1, a_2, ..., a_n och brytningsindices resp. n_1, $n_2 \ldots n_n$. Antag vidare, att en punkt på bottnen betraktas av ett öga placerat lodrätt ovanför punkten successivt i 2:a, 3:e ... n:e och slutligen i ett $(n+1)$:a lager, vars brytningsindex är n_{n+1}. Antagas slutligen respektive bildpunkters avstånd från 1:a, 2:a ... n:e gränsytan vara x_1, $x_2 \ldots x_n$, så erhålles på alldeles samma sätt som ekv. (1) rekurrensformeln

$$x_m = \frac{n_{m+1}}{n_m}(x_{m-1} + a_m) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Insättes i (3) successivt $m = 1, 2, 3 \ldots n$, varvid märkes, att $x_0 = 0$, så fås efter vartannat

$$x_1 = n_2 \cdot \frac{a_1}{n_1}$$

$$x_2 = n_3\left(\frac{a_1}{n_1} + \frac{a_2}{n_2}\right)$$

$$x_3 = n_4\left(\frac{a_1}{n_1} + \frac{a_2}{n_2} + \frac{a_3}{n_3}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

och slutligen

$$x_n = n_{n+1}\sum_1^n \frac{a_m}{n_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Är nu det $(n+1)$:a lagret luft, så är $n_{n+1} = 1$, och således

$$x_n = \sum_1^n \frac{a_m}{n_m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Som man ser, är resultatet oberoende av de brytande mediernas inbördes ordning.

Betecknas bottnens skenbara förflyttning med y, erhålles densamma ur ekvationen

$$y = \sum_1^n a_m - x_n,$$

alltså enligt (5)

$$y = \sum_{1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n_m}\right) a_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Det är således ekv. (5), som ger den enklaste formuleringen av sammanhanget mellan de i problemet ingående storheterna. En synnerligen intressant generalisation erbjuder sig nu, om man nämligen tänker sig fenomenet försiggå i en följd av oändligt tunna skikt, vilkas brytningsindex kontinuerligt ändrar sig efter en bestämd lag, men därmed har man överskridit den elementära matematikens gränser.

Rekurrenta serier.

Av KARL BLIX.

Föreligger en bruten rationell funktion av x av formen:

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_{p-1}x^{p-1}}{\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots+\beta_p x^p},$$

där p är något av talen 1, 2, 3 o. s. v. och α och β äro godtyckliga konstanter med den inskränkningen, att ej *alla* α, ej heller β_0 och β_p äro $=0$, så erhålles, då man dividerar täljaren med nämnaren, en oändlig potensserie, d. v. s. ett uttryck av formen $A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots+A_nx^{n-1}+\ldots$, där koefficienterna A_1, A_2, $\ldots A_n$ här äro vissa konstanter. Bråket säges därför generera (alstra) serien och kallas seriens genererande bråk. I det följande uttryckes detta med beteckningen

$$\frac{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_{p-1}x^{p-1}}{\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots+\beta_p x^p} \approx \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{n-1},$$

där alltså tecknet $\approx$ läses genererar (sc. vid utförd division).

I stället för att bestämma koefficienterna A genom att utföra den ofta tidsödande divisionen sätta vi dividenden = = divisorn $\times$ kvoten + resten. För erhållande av större överskådlighet förkorta vi först bråket med β_0 och införa beteckningarna:

$$\frac{\alpha_0}{\beta_0}=a_0,\ \frac{\alpha_1}{\beta_0}=a_1,\ \ldots\ \frac{\alpha_{p-1}}{\beta_0}=a_{p-1} \quad \text{och}$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_0}=-b_1,\ \frac{\beta_2}{\beta_0}=-b_2,\ \ldots\ \frac{\beta_p}{\beta_0}=-b_p,$$

då bråket alltså antar formen:

$$\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{p-1}x^{p-1}}{1-b_1x-b_2x^2-\ldots-b_px^p}.$$

Vi få då:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{p-1}x^{p-1}=$$
$$=(1-b_1x-b_2x^2-\ldots-b_px^p)(A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots+A_nx^{n-1})+$$
$$+Cx^n+C_1x^{n+1}+\ldots+C_{p-1}x^{n+p-1},$$

där C äro vissa konstanter. Som båda leden äro identiskt lika, måste som bekant koefficienten för x^0, x, x^2 o. s. v. i båda leden vara lika, och vi få alltså ett ekv.-system med $n+p$ ekvationer och lika många obekanta: $A_1 \ldots A_n$, C, $C_1 \ldots C_{p-1}$, varur dessa kunna bestämmas.

För klarare uppfattning av förfarandet utföra vi räkningen för $p=3$. Vi få då:

$$a_0+a_1x+a_2x^2=$$
$$=(1-b_1x-b_2x^2-b_3x^3)(A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots+A_nx^{n-1})+\ldots^1$$
$$=A_1+(A_2-b_1A_1)x+(A_3-b_1A_2-b_2A_1)x^2+$$
$$+(A_4-b_1A_3-b_2A_2-b_3A_1)x^3+(A_5-b_1A_4-b_2A_3-b_3A_2)x^4+\ldots$$
$$+(A_n-b_1A_{n-1}-b_2A_{n-2}-b_3A_{n-3})x^{n-1}+\ldots$$

Här erhålles ekv.-systemet:

$$(1)\quad \ldots \quad \begin{cases} A_1=a_0 \\ A_2-b_1A_1=a_1 \\ A_3-b_1A_2-b_2A_1=a_2 \\ A_4-b_1A_3-b_2A_2-b_3A_1=0 \\ A_5-b_1A_4-b_2A_3-b_3A_2=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n-b_1A_{n-1}-b_2A_{n-2}-b_3A_{n-3}=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

varur fås: $A_1=a_0$; $A_2=a_1+b_1a_0$; $A_3=a_2+b_1a_1+b_1^2a_0+b_2a_0$ och sedan beräknas successivt A_4, $A_5 \ldots A_n$ enligt samma regel, som anges av rekursionsformeln

$$A_n=b_1A_{n-1}+b_2A_{n-2}+b_3A_{n-3}.$$

Definition: En oändlig potensserie

$$A_1+A_2x+A_3x^2+\ldots+A_nx^{n-1}+\ldots,$$

[1] Resten, som kan undanskjutas i det oändliga, om man låter n växa, intresserar oss ej i detta sammanhang och har därför utelämnats.

vars koeff. bildas på detta sätt, d. v. s. där koeff. från och med någon viss term bildas av de p närmast föregående genom rekursionsformeln:

$$A_n = b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2} + \ldots + b_p A_{n-p} \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

där b äro konstanter, kallas en rekurrent serie och ekv. (2) dess skala.[1]

Av det föregående inses, att bråket

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1}}{1 - b_1 x - b_2 x^2 - \ldots - b_p x^p}$$

genererar en rek. serie med skalan

$$A_n = b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2} + \ldots + b_p A_{n-p},$$

och att omvänt en sådan serie har ovanstående bråk till genererande. För att finna det gen. bråket, då serien är given, måste man känna dess skala $(b_1, b_2, \ldots b_p)$ och dess p första termer[2] $(A_1, A_2, \ldots A_p)$, då man sedan lätt beräknar a_0; a_1; $a_2 \ldots a_{p-1}$ ur (jfr (1)):

$$a_0 = A_1; \quad a_1 = A_2 - b_1 A_1; \quad a_2 = A_3 - b_1 A_2 - b_2 A_1; \ldots;$$

$$a_{p-1} = A_p - b_1 A_{p-1} - b_2 A_{p-2} - \ldots - b_{p-1} A_1.$$

Ex. 1. Vilket är seriens $1 + 4x + 10x^2 + 22x^3 + \ldots$ genererande bråk? Fyra termer äro givna och alltså $p = 2$.

Vi få ekv.-syst. $\begin{cases} 10 = 4b_1 + b_2 \\ 22 = 10b_1 + 4b_2 \end{cases}$, som ger $b_1 = 3$; $b_2 = -2$

$\therefore$ skalan $A_n = 3A_{n-1} - 2A_{n-2}$

och bråkets nämnare: $1 - 3x + 2x^2$.

Vidare är $a_0 = A_1 = 1$ $a_1 = A_2 - b_1 A_1 = 4 - 3 \cdot 1 = 1$

och alltså det gen. bråket: $\dfrac{1 + x}{1 - 3x + 2x^2}$.

Att bestämma en rekurrent series allmänna term $A_n x^{n-1}$.

Medelst skalan kan man ju alltid beräkna term för term i den rek. serien och sålunda erhålla värdet av A_n

[1] Benämningen rek. serie leder sitt ursprung från de Moivre (1720), som gjort den till föremål för ingående behandling. Euler (1748) har sedan utbildat deras teori.

[2] Är seriens $2p$ första termerna givna beräknas lätt ur dem $b_1, b_2, \ldots b_p$.

för vilket *bestämt* n som helst genom att uppskriva serien t. o. m. denna term. Vår uppgift består emellertid i att söka uttrycka A_n såsom en funktion av n, så att man kan beräkna seriens koeff. genom att i denna funktion insätta $n=1, 2, 3$ o. s. v.[1]

Vi betrakta till att börja med den enklast tänkbara rek. serien, nämligen den vars skala är $A_n = bA_{n-1}$ och första term a. Dess gen. bråk är alltså $\frac{a}{1-bx}$ och serien $a+abx+ab^2x^2+ab^3x^3+\ldots$, alltså en geometrisk serie med kvoten bx och allmänna termen $ab^{n-1}x^{n-1}$. Vi kunna alltså skriva $\frac{a}{1-bx} \approx \sum_{n=1}^{\infty} ab^{n-1}x^{n-1}$.

Nu kunna vi också bestämma den allm. termen i serien $1+4x+10x^2+22x^3+\ldots$ Dess gen. bråk ha vi funnit vara: $\frac{1+x}{1-3x+2x^2}$. Som vi utan svårighet se, kan nämnaren uppdelas i de liniära faktorerna $1-x$ och $1-2x$, och för uppdelning i partialbråk sätta vi

$$\frac{1+x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{c_1}{1-x} + \frac{c_2}{1-2x} = \frac{c_1-2c_1x+c_2-c_2x}{1-3x+2x^2}$$

$$\therefore \begin{cases} c_1+c_2=1 \\ -2c_1-c_2=1 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} c_1=-2 \\ c_2=3 \end{cases}$$

och alltså $$\frac{1+x}{1-3x+2x^2} = \frac{-2}{1-x} + \frac{3}{1-2x}.$$

Utvecklas dessa identiskt lika uttryck i potensserier, så måste dessa också bli identiskt (alltså term för term) lika. Men $\frac{-2}{1-x}$ och $\frac{3}{1-2x}$ generera var sin geometriska serie med allm. termen $-2\cdot 1^{n-1}x^{n-1}$ och $3\cdot 2^{n-1}x^{n-1}$, och alltså måste den av bråket $\frac{1+x}{1-3x+2x^2}$ gen. seriens allm. term

[1] Denna uppgift löses även i differenskalkylen.

vara $(3 \cdot 2^{n-1} - 2)x^{n-1}$. Vi kunna alltså skriva

$$\frac{1+x}{1-3x+2x^2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} (3 \cdot 2^{n-1} - 2)x^{n-1}.$$

Som ännu ett exempel skola vi bestämma den allm. termen hos en serie, som spelat en viss roll i matematikens historia,[1] nämligen $x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+8x^6+\ldots$ Skalan märker man genast vara $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ och alltså $b_1 = 1$; $b_2 = 1$; $a_0 = A_1 = 0$; $a_1 = A_2 - b_1 A_1 = 1$ $\therefore$ det gen. bråket $= \frac{x}{1-x-x^2}$. Nämnaren kan uppdelas i liniära faktorer på följande sätt. Först utbrytes $x^2 : x^2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 1\right)$, trinomen sättes $= 0$ och ekv. löses i avseende på $\frac{1}{x}$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore 1 - x - x^2 = x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right).$$

Uppdelas det gen. bråket i partialbråk på samma sätt som i föregående ex., finner man

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}x} \approx$$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left| \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right| x^{n-1}.$$

[1] Den anträffas hos Leonardo Pisano (1228) och har undersökts av Leibniz (1646—1716), som fann det längre fram angivna uttrycket för summan av dess $n-1$ första koeff., och att $A_n \cdot A_{n+3} = A_{n+1} \cdot A_{n+2} \pm 1$, och att $A_{n+1}^2 = A_n \cdot A_{n+2} \pm 1$. Redan förut hade Girard (1634) visat, att värdet $\frac{A_n}{A_{n+1}}$ med växande n allt mer närmar sig förhållandet mellan den reg. 10-hörningens sida och den omskrivna cirkelns radie.

Att detta invecklade uttryck för den allm. termen ej synnerligen lämpar sig för numerisk beräkning av termerna är väl sant, men — det finns intet annat.

Såsom vi av ovanstående exempel förstå, grundar sig metoden för bestämningen av den allmänna termen på det gen. bråkets uppdelning i partialbråk. Då metoder härför bruka finnas angivna i läroböcker i diff.- och integr.-kalkyl, hänvisa vi till någon sådan, och erinra blott, att där (med en enkel förändring) bevis lämnas för att de uppkomna bråken endast kunna ha formen

$$\frac{a}{1-bx},\ \frac{a}{(1-bx)^k},\ \frac{P+Qx}{1+px+qx^2} \text{ eller } \frac{P+Qx}{(1+px+qx^2)^k},$$

där a, b, P, Q, p, q äro konstanta tal och k något av talen 2, 3, 4, o. s. v. I de två senare fallen är $p^2-4q<0$. Vi ha därför att bestämma den allm. termen för den rek. serie, som vart och ett av dessa bråk genererar.

1. Vi ha redan funnit, att $\frac{a}{1-bx} \approx \sum_{n=1}^{\infty} ab^{n-1}x^{n-1}$.

2. Använda vi binomialteoremet,[1] finna vi

$$\frac{a}{(1-bx)^k} = a(1-bx)^{-k} =$$

$$= a\left(1+kbx+\frac{k(k+1)}{1\cdot 2}\cdot b^2x^2+\frac{k(k+1)(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot b^3x^3+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\cdot b^{n-1}x^{n-1}+\ldots\right).$$

Beakta vi dessutom, att

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\cdot\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+n-2)}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-2)}=1$$

(tälj. och nämn. utgör produkten av de $n+k-2$ första hela talen) och att således

$$\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)},$$

[1] Här rent formellt i st. f. att utföra divisionen, som skulle ge samma serie.

få vi

$$\frac{a}{(1-bx)^k} \approx$$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)} b^{n-1}x^{n-1}.$$

$(k=2,\ 3,\ 4$ o. s. v.).

Specialfall härav äro:

$$\frac{1}{(1-x)^2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}; \quad \frac{1}{(1-x)^3} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^{n-1};$$

$$\frac{1}{(1-x)^4} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{6} x^{n-1} \text{ o. s. v.}$$

Ex. 1. $$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2} \approx$$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} [n(n+1)-n]x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

Ex. 2. $$\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4} = \frac{6}{(1-x)^4} - \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} \approx$$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^{n-1};$$

Ex. 3. $$\frac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5} \approx \sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^{n-1} \text{ o. s. v.}$$

3. Uppdelas $1+px+qx^2$ i faktorer, som i detta fall äro imaginära, erhålles, om man sätter

$$\varrho = \sqrt{q} \text{ och } \cos\varphi = -\frac{p}{2\sqrt{q}}:$$

$$1+px+qx^2 = 1-2\varrho x\cos\varphi+\varrho^2x^2 =$$

$$= [1-\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)x]\,[1-\varrho(\cos\varphi-i\sin\varphi)x].$$

Sättes $$\frac{P+Qx}{1+px+qx^2} = \frac{c_1}{1-\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)x} +$$

$$+ \frac{c_2}{1-\varrho(\cos\varphi-i\sin\varphi)x},$$

finner man $\begin{cases} c_1 + c_2 = P \\ c_1 - c_2 = \dfrac{P\varrho\cos\varphi + Q}{i\varrho\sin\varphi} \end{cases}$

och den allm. termen =

$$= [c_1(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n-1} + c_2(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{n-1}]\,\varrho^{n-1}x^{n-1} =$$

$$= [(c_1+c_2)\cos(n-1)\varphi + (c_1-c_2)\,i\sin(n-1)\varphi]\,\varrho^{n-1}x^{n-1} =$$

$$= \left[P\varrho\cos(n-1)\varphi + \frac{P\varrho\cos\varphi + Q}{\sin\varphi}\cdot\sin(n-1)\varphi\right]\varrho^{n-2}x^{n-1} =$$

$$= \frac{P\varrho\sin n\varphi + Q\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi}\cdot\varrho^{n-2}x^{n-1}$$

och alltså

$$\frac{P+Qx}{1+px+qx^2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P\varrho\sin n\varphi + Q\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi}\cdot\varrho^{n-2}x^{n-1},$$

där $\varrho = \sqrt{q}$ och $\cos\varphi = -\dfrac{p}{2\sqrt{q}}$, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2\sqrt{q}}$.

Specialfall: 1) Är $P = \sin\varphi$; $Q = 0$,

blir $$\frac{\sin\varphi}{1 - 2\varrho x\cos\varphi + \varrho^2x^2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^{n-1}x^{n-1}\sin n\varphi;$$

2) Är $$P = 1; \quad Q = -\varrho\cos\varphi,$$

blir $$\frac{1 - \varrho x\cos\varphi}{1 - 2\varrho x\cos\varphi + \varrho^2x^2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^{n-1}x^{n-1}\cos(n-1)\varphi.$$

4. Uttrycket för den allm. termen i den serie, som genereras av $\dfrac{P+Qx}{(1+px+qx^2)^k}$, är synnerligen invecklat, varför det här ej medtages. Så är t. ex. $\dfrac{P+Qx}{(1+px+qx^2)^2} \approx$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P\varrho[(n+2)\sin n\varphi - n\sin(n+2)\varphi] +}{4\sin^3\varphi}$$

$$+ \frac{Q[(n+1)\sin(n-1)\varphi - (n-1)\sin(n+1)\varphi]}{4\sin^3\varphi}\cdot\varrho^{n-2}x^{n-1}.$$

För att bestämma en rek. series allm. term uppsöker man alltså dess gen. bråk, uppdelar detta i partialbråk, varefter man tager summan av de allmänna termerna för de serier, som partialbråken generera.

Ex. Vilket är det 20:de talet i följden 1; 3; 8; 17; 33; 64; o. s. v.? Man finner

$$A_n = 3A_{n-1} - 3A_{n-2} + 2A_{n-3} \text{ och } a_0 = 1;\ a_1 = 0;\ a_2 = 2$$

$$\therefore \frac{1+2x^2}{1-3x+3x^2-2x^3} \approx 1+3x+8x^2+17x^3+33x^4+64x^5+\ldots$$

Uppdelas det gen. bråket i partialbråk: $\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x+x^2}$, se vi att $P=1$; $Q=0$; $\varrho=1$; $\cos\varphi=\frac{1}{2}$ och $\varphi=60°$ och alltså $\frac{1+2x^2}{1-3x+3x^2-2x^3} \approx \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n - \frac{\sin n\cdot 60°}{\sin 60°}\right)x^{n-1}$.

Emedan $\frac{\sin n\cdot 60°}{\sin 60°}$ antager värdena 0, 1, 1, 0, —1, —1 alltefter som $n:6$ lämnar 0, 1, 2, 3, 4 eller 5 till rest, kommer det 20:de talet att bli $=2^{20}-1=1\,048\,575$.

Att finna summan av en rek. series n första termer.

Typisk för lösningsmetoden är den vanliga härledningen av den geometriska seriens summa s_n:

$$s_n = a + abx + ab^2x^2 + \ldots + ab^{n-1}x^{n-1}$$

$$\therefore -bx\cdot s_n = -abx - ab^2x^2 - \ldots - ab^{n-1}x^{n-1} - ab^nx^n$$

$$\therefore s_n - bx\cdot s_n = a - ab^nx^n \quad \therefore s_n = \frac{a(1-b^nx^n)}{1-bx}.^1$$

Det karakteristiska för metoden är, att vid additionen alla mellantermer »taga ut varandra».

[1] Denna formel gäller naturligtvis för *alla* värden på x. Sättes $x=\frac{1}{b}$, antager emellertid s_n formen $\frac{0}{0}$, vars värde erhålles, om man först deriverar tälj. och nämn. i avseende på x och därefter insätter $x=\frac{1}{b}$, då man erhåller $s_n = na$.

Vi lösa uppgiften i det speciella fallet att skalan är $A_n = b_1 A_{n-1} + b_2 A_{n-2}$:

$$s_n = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 \ldots + A_n x^{n-1}$$

$$\therefore -b_1 x \cdot s_n = -b_1 A_1 x - b_1 A_2 x^2 - b_1 A_3 x^3 \ldots - b_1 A_{n-1} x^{n-1} - b_1 A_n x^n$$

$$-b_2 x^2 \cdot s_n = -b_2 A_1 x^2 - b_2 A_2 x^3 \ldots - b_2 A_{n-2} x^{n-1} - b_2 A_{n-1} x^n - b_2 A_n x^{n+1}.$$

Adderas dessa ekv. bli på grund av skalan koeff. för x^2 t. o. m. $x^{n-1} = 0$ och alltså efter division med $1 - b_1 x - b_2 x^2$:

$$s_n = \frac{a_0 + a_1 x - A_{n+1} \cdot x^n - b_2 A_n x^{n+1}}{1 - b_1 x - b_2 x^2},$$

där $a_0 = A$; $a_1 = A_2 - b_1 A_1$.

Den generella lösningen, d. v. s. när skalan är (2), sker på alldeles analogt sätt.

Ex. 1. I den aritmetisk-geometriska serien

$$a + (a+d)x + (a+2d)x^2 + \ldots + (a+(n-1)d)x^{n-1}$$

är $A_n - A_{n-1} = A_{n-1} - A_{n-2}$

och alltså skalan:

$$A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2} \quad \because b_1 = 2;\ b_2 = -1 \text{ och}$$

$$a_0 = A_1 = a;\ a_1 = A_2 - b_1 A_1 = a + d - 2a = d - a$$

och alltså

$$s_n = \frac{a + (d-a)x - (a+nd)x^n + (a+(n-1)d)x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Sättes $x = 1$, få vi den aritmetiska serien, och dess summa (tag andra derivatan av tälj. och nämn. i avseende på x och insätt sedan $x = 1$) reduceras till $\frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$.

Är $a = d = 1$, fås $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} =$

$$= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Ex. 2. I Pisanos ovananförda serie är

$$b_1 = b_2 = 1;\ a_0 = 0;\ a_1 = 1$$

och alltså $s_n = \dfrac{x - A_{n+1} \cdot x^n - A_n \cdot x^{n+1}}{1 - x - x^2}$

och för $x=1$: $1+1+2+3+5+ \ldots + A_{n-1} = A_{n+1} - 1$.

Ex. 3. I serien $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho^{n-1} x^{n-1} \sin n\varphi$ är (se sid. 8) skalan

$$A_n = 2\varrho \cos\varphi \cdot A_{n-1} - \varrho^2 A_{n-2};\ a_0 = A_1 = \sin\varphi;$$

$$a_1 = A_2 - b_1 A_1 = \varrho \sin 2\varphi - 2\varrho \cos\varphi \sin\varphi = 0$$

och alltså

$$s_n = \frac{\sin\varphi - \varrho^n x^n \sin(n+1)\varphi + \varrho^{n+1} x^{n+1} \sin n\varphi}{1 - 2\varrho x \cos\varphi + \varrho^2 x^2}.$$

För $\varrho x = 1$ blir: $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi =$

$$= \frac{\sin\varphi - \sin(n+1)\varphi + \sin n\varphi}{2(1 - \cos\varphi)} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2 \sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Konvergenta rekurrenta serier och deras summa.

Eftersom bråket

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1}}{1 - b_1 x - b_2 x^2 - \ldots - b_p x^p}$$

antingen är av formen

$$\frac{a}{1 - bx},\ \frac{a}{(1 - bx)^k},\ \frac{P + Qx}{1 + px + qx^2} \text{ eller } \frac{P + Qx}{(1 + px + px^2)^k}$$

(i de båda senare fallen är $p^2 - 4q < 0$) eller kan upplösas i sådana partialbråk, så är den rek. serien antingen genererad av ett sådant bråk eller summan av de av partialbråken genererade serierna, som vi vilja kalla dess partialserier. Tydligt är att om *alla* partialserierna äro konvergenta, så är även serien själv konvergent och dess summa = summan av partialserierna. Vi ha alltså att betrakta de serier, som genereras av vart och ett av partialbråken.

1. Som bekant är $\sum_{n=1}^{\infty}{}' ab^{n-1}x^{n-1}$ konvergent, om $bx<1$ $\because |x|<\left|\frac{1}{b}\right|$, och dess summa är i så fall $=\frac{a}{1-bx}$.

2. I differentialkalkylen bevisas, att binomialserien

$$a\left(1+\frac{k}{1}bx+\frac{k(k+1)}{1\cdot 2}b^2x^2+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{k(k+1)\ldots(k+n-2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}b^{n-1}x^{n-1}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a\cdot\frac{n(n+1)\ldots(n+k-2)}{1\cdot 2\ldots(k-1)}b^{n-1}x^{n-1},$$

där $k=2, 3, 4$ o. s. v., är konvergent för $|bx|<1$ $\because |x|<\left|\frac{1}{b}\right|$, och att dess summa då är $\frac{a}{(1-bx)^k}$.

3. Som vi visat (se ex. 3 sid. 11) är $\sum_{n=1}^{n}\varrho^{n-1}x^{n-1}\sin n\varphi=$

$$=\frac{\sin\varphi-\varrho^n x^n\sin(n+1)\varphi+\varrho^{n+1}x^{n+1}\sin n\varphi}{1-2\varrho x\cos\varphi+\varrho^2x^2},$$

varav följer att serien konvergerar för $|\varrho x|<1$, och att summan av den oändliga serien då är $s'=\frac{\sin\varphi}{1-2\varrho x\cos\varphi+\varrho^2x^2}$. Likaledes fås, att $\sum_{n=1}^{\infty}{}'\varrho^{n-1}x^{n-1}\sin(n-1)\varphi$ är konvergent för $|\varrho x|<1$ och dess summa $s''=\frac{\varrho x\sin\varphi}{1-2\varrho x\cos\varphi+\varrho^2x^2}$.

Alltså är $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P\varrho\sin n\varphi+Q\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi}\varrho^{n-2}x^{n-1}=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P\sin n\varphi}{\sin\varphi}\cdot\varrho^{n-1}x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q\sin(n-1)\varphi}{\varrho\sin\varphi}\cdot\varrho^{n-1}x^{n-1}$$

konvergent för $|\varrho x| < 1$ ∴ $|x| < \frac{1}{\varrho}$, och dess summa =

$$= \frac{P}{\sin\varphi} \cdot s' + \frac{Q}{\varrho \sin\varphi} \cdot s'' = \frac{P + Qx}{1 - 2\varrho x \cos\varphi + \varrho^2 x^2}.$$

Men här är $\varrho = \sqrt{q}$ och $\cos\varphi = -\frac{p}{2\varrho}$ och alltså summan =

$$= \frac{P + Qx}{1 + px + qx^2}.$$

4. Även den av $\frac{P + Qx}{(1 + px + qx^2)^k}$ genererade serien är konvergent för $|x| < \frac{1}{\sqrt{q}}$ och dess summa då = bråket, något som här blott påpekas, då vi ej närmare befattat oss med nämnda serie.

Av det sagda följer, att en rek. serie, som genereras av bråket $\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1}}{1 - b_1 x - b_2 x^2 - \ldots - b_p x^p}$, är konvergent för alla x-värden, som äro numeriskt mindre än det numeriskt minsta av alla inverterade värden av b och av $\sqrt{q}$, där b och q äro koeff. för x och x^2 i partialbråken, och att under denna förutsättning dess summa är = summan av partialserierna = summan av partialbråket = det genererande bråket. Alltså kan tecknet ≈ utbytas mot =, om det numeriska värdet av x är tillräckligt litet.

Om vikt enbart som massbegrepp vid undervisningen i fysik.[1]

Av OTTO GALLANDER.

I fysiken äro begreppen massa och kraft klara och nödvändiga. Dessutom användes för dessa begrepp ordet vikt. Med detta ord menar man i dagliga livet massa. En person, som ej studerat fysik, skulle opponera sig mot att en påse kaffe ej vägde lika mycket vid polen som vid ekvatorn. Men så väl i elementära läroböcker i fysik som i vetenskapliga handböcker på olika språk är vikt vanligen definierad som kraftbegrepp. Författare ha dock ofta så påverkats av det populära viktsbegreppet, att de i strid mot sin egen definition låtit vikt på somliga punkter av sin framställning bliva ett massbegrepp.

Endast undantagsvis träffar man någon, som så ärligt fasthåller vid sin definition på vikt som Chwolson. Då han i första delen av sin lärobok i fysik meddelar vikten av 1 l luft vid 0° och 760 mm säger han, att den väger 1,293 gram vid 45° latitud, men i Petersburg 1,295 gram.[2] Han fasthåller dock ej vid detta viktsbegrepp genom hela sin lärobok utan utbyter det t. ex. i tredje delen vid behandlingen av kalorimetrien mot massbegrepp. Så gör också en välkänd svensk läroboksförfattare.

Ett vanligt knep att komma ifrån de olägenheter, som följa av att definiera vikt som kraft, är att mäta jordens dragning med olika mått på olika ställen, så att man får

[1] Föredrag hållet på Fysiska sällskapet i Stockholm. Efter den följande diskussionen beslöt sällskapet att tillsätta en kommitté för att föreslå ett uttalande av sällskapet i frågan. Sällskapets beslut finnes bland »kortare meddelanden» i föreliggande häfte av tidskriften.

[2] Chwolson: Lehrbuch der Physik I. sid. 410.

vikten av en kropp konstant d. v. s. man överger i verkligheten definitionen av vikt som kraft och låter den i stället bliva massa. Så säger t. ex. Winkelmann i sin stora handbok[1]:

»Man kan välja mellan tvenne tillvägagångssätt: antingen tar man till viktsenhet vikten hos en cm^3 vatten på den plats, där man just vill väga. Då är vikten på en kropp en av platsen oberoende storhet, eller man tar till viktsenhet vikten på en cm^3 vatten på en bestämd plats; då ändrar sig kroppens vikt från plats till plats efter tyngdkraftens ändringar. Det är klart, att det förra förfarandet är mer praktiskt — och det faktiskt använda vid all vägning med balansvåg — men det senare är mer vetenskapligt.»

Detta vacklande återfinnes nästan i alla läroböcker och föranleder t. o. m. världsbekanta fysiker till uttalanden av tvivelaktigt värde.

Vållar denna tvetydighet vid behandlingen av viktsbegreppet svårigheter för vetenskapsmän, så gör den det mångdubbelt för nybörjare av fysikens studium. Det torde därför vara på tiden, att dessa svårigheter undanrödjas. Detta kan endast göras därigenom att det tvetydiga viktsbegreppet utmönstras. Detta hindrar dock ej att man kan bibehålla ordet vikt, som är djupt rotat i det vanliga språket, men då enas om det som term för massa och således låter detta ord ha samma betydelse inom vetenskapen som i det praktiska livet. Den kraft, varmed en kropp attraheras av jorden, må betecknas såsom kroppens *tyngd*.

I det följande vill jag skissera ett sätt att behandla ordet vikt endast som uttryck för massa vid undervisningen i fysik.

Då man i fysiken inför begreppen rum — och därur abstraherat längdbegrepp — samt tid, försöker man ej att definiera dem; man anger blott, huru de mätas. Har man definierat enheten för längd och tid och angivit, huru dessa enheter användas, är man nöjd. På samma sätt måste den

[1] Winkelmann: Handbuch der Physik I 2. aufl. s. 44.

tredje grundstorheten massa behandlas. I dagliga livet menar man, som sagt, med vikt just massa. Grundbegreppet massa har lika väl gått i blodet på oss som grundbegreppen längd och tid men under namnet vikt. Begreppet massa behöver således lika litet definieras som begreppet längd, och försök till definition verka blott förvirrande. Enheten för massa, gram, är väl definierad. En grametalong behåller sin massa, var den än befinner sig. (Vi bortse i denna uppsats från relativitetsteorien så väl beträffande längd som tid och massa.) Multipler av ett gram erhållas på motsvarande sätt som multipler av en centimeter. Skall man jämföra två längder, behöver man blott lägga dem bredvid varandra. Skall man jämföra två tider måste man använda något reproducerbart fenomen, som kräver tid. Skall man jämföra massor (= väga), måste man använda något fenomen, som beror på kropparnas massor, och man har därvid valt deras tryck på underlaget, »jordens dragning» på dem. Man går då ut från det erfarenhetsrönet, att det tryck, en viss massa utövar, är lika inom det lilla rum, som upptages av en vanlig våg. Det instrument, varav man betjänar sig vid jämförelser av vikter, är då balansvågen.

Detta är enkelt. Svårigheten möter vid definitionen av kraftenheten och vid tillämpningen av denna definition. Redan från början må dock framhållas, att den här nedan förordade reformen är relativt lätt att genomföra, då den knappt berör den stora allmänheten utan endast vetenskapligt eller tekniskt bildade personer samt adepter till dessa kategorier.

Vid val av kraftenhet har man två förslag att välja mellan.

Man kan taga till enhet jordens dragning på en gram vid 45° latitud och havets nivå. Av pedagogiska skäl bör denna kraft ej kallas gram. Gram och kilogram måste reserveras som massenheter. I Tyskland har man föreslagit, att denna kraftenhet kallas *bar*. Kilogramkraft kallas då *kilobar*. Detta förslag vore lätt att genomföra. Mot det-

samma kan anmärkas, att det ej står i god överensstämmelse med c. g. s.-systemet och det praktiska system, som inom elektricitetsläran fått ersätta nämnda system.

Ett annat sätt vore att taga dyn till grundenhet. Dess definition må då åtminstone tills vidare givas i sin ursprungliga form. Men kraftbegreppet kräves i våra skolor, innan begreppet acceleration genomgåtts. Följden härav är, att man vid behandlingen av det statiska kraftbegreppet måste provisoriskt definiera dyn eller hellre megadyn ($= 10^6$ dyn) på annat sätt, t. ex. det här nedan angivna.

Den första erfarenhet, man har av kraft är muskelspänningen, då man lyfter en kropp. I systemet med kg som kraftenhet ligger denna erfarenhet till grund. Det låter sig göra att bibehålla detta tillvägagångssätt även då megadyn tages till kraftenhet. Man får då säga: Enligt vår erfarenhet »drager jorden» alla kroppar till sig. Då den kraft, varmed jorden drager en kropp, t. ex. en kg-etalong, alltid finnes till hands, jämför man andra krafter med nämnda dragning. Jordens dragning är emellertid ej lika stor över allt. Såväl latitud som höjd över havet måste därför ingå i definitionen på kraftenheten. För att proportionalitetsfaktorn i en del formler i mekaniken skall bliva praktiskt taget 1 eller en diginitet av 10, har man tagit till kraftenhet en megadyn, som är den kraft, varmed jorden drager $1{,}020 \left(= \frac{1}{0{,}9806} \right)$ kg vid 45° latitud och havets nivå.

Till villkoren om ortsbestämningen i den senaste definitionen behöver man ej ta hänsyn vid mätningar, då ett fel på $\pm 0{,}3\,\%$ ej spelar någon roll. Vid de flesta tekniska mätningar kan man tillåta ett fel på $\pm 2\,\%$, och man kan då sätta: 1 megadyn är den kraft, varmed jorden drager en kg-etalong. I praktiska livet äro mätningar av krafter relativt sällsynta.

Då en vetenskapsman behöver mäta krafter med stor noggrannhet, kan han naturligtvis använda vilka medel han vill, och för honon erbjuder det ingen svårighet att sedan reducera resultatet till vilken enhet som helst.

Vid behandlingen av övriga härledda enheter komma naturligtvis några konstanter att ändras, då kg-kraft utbytes mot md (= megadyn).

Enheten för specifikt tryck blir $^{md}/_{cm^2}$. Denna storhet behöver mycket ofta bestämmas så väl i tekniken som vid vetenskapliga undersökningar. Då det är fråga om tekniska konstruktioner o. d. kan man använda vanliga tabeller och utan tvekan sätta $^{md}/_{cm^2} = {}^{kg}/_{cm^2}$.

Vid fysikaliska arbeten brukar man primärt få trycket i mm kvicksilver och sedan sätta $1{,}033\ {}^{kg}/_{cm^2} = 760$ mm kvicksilver = 1 atmosfär. Då konstanten 1,033 avser noggrannhet på 0,1 %, måste man korrigera sistnämnda konstant och får 1 atmosfär = $1{,}013\ {}^{md}/_{cm^2}$.

Härvid bör dock anmärkas, att då man syftar till en noggrannhet på 0,1 %, borde man naturligtvis vid tryckbestämningar ta hänsyn till variationerna i tyngdkraften. Detta gör man emellertid aldrig i elementarfysiken, och i det följande bortses därför från dessa variationer.

Enheten för arbete blir megadynmeter = 1,020 kgm.

Effekter mätas tyvärr mycket i hästkrafter. Denna enhet bör utmönstras[1]. Namnet är vilseledande, då det låter som om enheten åsyftade kraft och ej effekt, och så drar denna enhet med sig reduktionsfaktorerna 75 och 736. En hästkraft är som bekant av samma storhetsordning som en kilowatt, och denna enhet har kommit till användning både vid vetenskapliga och tekniska arbeten. Denna enhet står i enkel relation till megadyn som kraftenhet.

1 megadynmeter = 10^8 dyncm = 10 joule;
1 megadynmeter/sek = 10 watt;
100 megadynmeter/sek = 1 kW.

Kraftekvationen lyder:

$$F = kma,$$

där F betecknar kraften, m massan, a accelerationen och

[1] I detta sammanhang må olämpligheten av termen »levande kraft» för rörelseenergi framhållas.

k är en konstant, som beror på de enheter, som användas. Mätes F i megadyn, m i kilogram, a i $^{m}/_{sek^2}$, blir $k = 0{,}1$; ty enligt definitionen på dyn blir $F_1 = m_1 a_1$, då kraften mätes i dyn m_1 i gram och a_1 i $^{cm}/_{sek^2}$. Multipliceras på båda sidor med 10^{-6} fås:

$$10^{-6}F_1 = 10^{-1} \cdot 10^{-3}m_1 \cdot 10^{-2}a_1.$$

Nu är: $10^{-6}F_1 = F$; $10^{-3}m_1 = m$ och $10^{-2}a_1 = a$

$$\therefore F = 0{,}1\,ma.$$

Vill man ha proportionalitetsfaktorn $k = 1$, måste man införa en kraftenhet, som är 0,1 megadyn. Man har föreslagit namnet Newton på denna enhet. Värdet av att äga en dylik enhet är, att i några formler proportionalitetsfaktorn blir 1 i stället för 10; nackdelen är, att man får ännu en enhet att minnas, och dessutom en enhet av annan storhetsordning än någon nu bruklig. Då vi nu äro vana, att i dessa formler ha faktorn 9,8, är det bekvämare att för närvarande ej införa enheten Newton utan i stället ha faktorn 10 i nämnda formler.

Så t. ex. blir formeln för rörelseenergien:

$$\tfrac{1}{2}\, m\,(v_1^2 - v^2) = 10\,FS,$$

då m mätes i kilogram, v i $^{meter}/_{sek}$, F i megadyn och S i meter.

Såsom synes bliva formlerna enkla i det föreslagna systemet liksom i c. g. s.-systemet, men enheterna äro av användbar storhetsordning.

Enheten för kraft har i det föregående definierats på två olika sätt.

Då som bekant redan förut dylika överbestämningar införts i metersystemet, torde det vara lämpligt att kasta en blick på dessa överbestämningar, innan vi granska den här ovan föreslagna.

Då metersystemet uppgjordes, behärskades man så av formella synpunkter, att de fysikaliska tillbakasattes. Man tänkte ej tillräckligt på, huru definitionerna skulle experimentellt användas. En följd härav var, att man nödgades

utbyta den teoretiska definitionen på meter mot en prototyp. Att med erforderlig noggrannhet tillämpa de absoluta enheterna för elektrisk strömstyrka, motstånd och spänning visade sig ytterst svårt. I elementarfysiken kunde man ej meddela de absoluta definitionerna förrän i slutet av kursen, och lärjungarna fingo därför från början ampère och ohm definierade genom de internationellt fastslagna konstanterna 1,118 och 1,063 resp. 1908 års internationella kongress beslöt, att ampère och ohm definitivt skulle definieras genom dessa konstanter och ej genom de praktiskt oanvändbara absoluta definitionerna. Några kongressledamöter ville som bekant att de absoluta definitionerna fortfarande skulle gälla och att blott den förstnämnda konstanten skulle ändras till 1,1183. Konsekvensen härav skulle blivit, att de båda nämnda konstanterna kommit att ändras i den mån mättekniken utvecklades, och efter varje sådan ändring skulle massor av andra konstanter omräknats. För att förekomma dylikt satte nämnda kongress två nollor efter vardera av definitionskonstanterna för ampère och ohm. Volt definierades sedan genom Ohms lag, som således genom denna definition kommer att uttryckas genom en formel med proportionalitetsfaktorn exakt = 1. På samma sätt definierades watt genom Joules lag. Av watt erhålles energienheten watt-sekund. Men c. g. s.-systemet har en mekaniskt definierad energienhet dyn-cm = 1 erg = 10^{-7} joule. I det ursprungliga c. g. s.-systemet definierades 1 watt som 1 joule per sek. Watt är således dubbeldefinierad och för att undvika motsägelse måste således någonstädes en empirisk proportionalitetsfaktor insättas t. ex. 1 joule = $k \times$ Watt-sek. Denna konstant får varje tid bestämma med den noggrannhet, dess mätteknik tillåter. I arbeten, som ej kräva mycket stor precision, kan denna konstant sättas = 1.

Redan tidigt fick metersystemet en dylik faktor, därigenom att kilogram definierades på två sätt. Man fick härigenom två volymenheter, litern och kubikdecimetern. Reduktionsfaktorn mellan dessa är enligt senaste bestäm-

ningar 1 liter = 1,000027 dm^3. Det är givetvis en fördel för vetenskapsmannen att ha båda dessa enheter att tillgå vid undersökningar. Han väljer för varje fall den, som bäst passar. I praktiken är 1 liter = 1 dm^3. För vetenskapsmannen betyder det intet, att han vid slutet av en undersökning kan få korrigera sina värden medelst en dylik empirisk faktor, men folk i allmänhet, som ej behöva större noggrannhet än att dylika konstanter kunna sättas = 1, har förmånen av att äga ett måttsystem med bekväma reduktionsfaktorer.

I det föregående har kraft- och massenheterna definierats. Kraftekvationen innehåller förutom kraft och massa även accelerationen. Då alla 3 storheterna definierats, måste kraftekvationen komma att innnehålla en empirisk faktor. Enligt definitionerna på kg och megadyn-meter blir som sagt denna konstant praktiskt taget = 0,1. Men denna konstant är en empirisk faktor, och den noggrannhet, med vilken den gäller, beror på, huru noggrant definitionskonstanten på megadyn valts.

Ville man låta de synpunkter, som ledde 1908 års internationella kongress, komma till sin rätt även beträffande de mekaniska enheterna, skulle man definitivt definiera megadyn så som här ovan av pedagogiska skäl gjorts, eventuellt med definitionskonstanten 1,020 given med större noggrannhet.

Enhetssystemets definitioner skulle på sådant sätt bliva i möjligaste grad omedelbart användbara och proportionalitetsfaktorerna inom mekaniken mycket enkla för praktiskt folk.

Som prov på, huru de föreslagna enheterna te sig vid behandlingen av fysikaliska problem må framställningen av Arkimedes' princip tjäna.

Vid genomgången av denna princip brukar man först experimentellt härleda densamma genom två försök med balansvåg. Det första visar, att en i en vätska nedsänkt kropp skenbart förlorar i vikt och det andra att vätskans vikt skenbart ökas lika mycket som den undanträngda vätskan väger. Det är påtagligt, att dessa försök tolkas på nu

övligt sätt med större exakthet, om man definierar vikt som massa än som kraft. I tillämpningarna inträda ej heller några större förändringar genom vikt som massa.

Det teoretiska beviset för ifrågavarande princip, blir till utseendet något krångligare.

Enligt välkänt mönster tänka vi oss kroppen cylindrisk och antaga dess höjd vara h dm, genomskärningsarea a dm^2 samt dess övre horisontella yta h_1 dm under vätskans fria yta. Vätskans spec. vikt är S $^{kg}/_{dm^3}$.

Absoluta trycket på den övre ytan är då:

$$\frac{ah_1S}{1{,}020} \text{ md (megadyn).}$$

Trycket på den undre:

$$\frac{a(h_1 + h)S}{1{,}020} \text{ md.}$$

Kroppen lyftes således upp av kraften

$$\frac{ahS}{1{,}020} \text{ md.}$$

Den av kroppen undanträngda vätskemassan väger ahS kg. Dennas tyngd är $\frac{ahS}{1{,}020}$ md.

Härav fås följande formulering av principen: En i en vätska nedsänkt kropp lyftes således av vätskan med en kraft, som är lika med tyngden av den undanträngda vätskan.

Antag att kroppen väger G kg. Dess tyngd är då $\frac{G}{1{,}020}$ md. I den nämnda vätskan blir således dess skenbara tyngd $\frac{G}{1{,}020} - \frac{ahS}{1{,}020}$ md och således dess skenbara vikt $G - ahS$ kg. Kroppen förlorar således skenbart i vikt lika mycket, som den undanträngda vätskan väger.

Ville man nå en större noggrannhet än nu är brukligt genom att ta hänsyn till tyngdkraftens variation, skulle

alla tal, som ange krafter, i det föregående multiplicerats med $\frac{g}{g_0}$, då g och g_0 är accelerationen vid fritt fall på platsen i fråga och vid 45° lattitud och havets nivå resp. Man kan då också omedelbart vid behandling av simmande kroppar få fram, att det djup, till vilket de sjunka, ej beror av g:s variationer.

*

Vinsten av den föreslagna reformen är, att vikt ej i en del av fysiken får betyda kraft, under det att vikt alltid i det praktiska livet och i större delen av fysiken betyder massa. Vidare skulle massbegreppet bliva lika lättskött i skolan som begreppen längd och tid. Man skulle ej behöva inlära två system: ett där kg är massenhet och ett där kg är kraftenhet. Sistnämnda system är dessutom onödigt svårt, emedan massenheten däri saknar namn. Dessa vinster äro av pedagogisk natur och torde endast föga beaktas av dem som makten hava. Men då det här förordade sättet att få reda i viktsbegreppet endast är en pedagogisk tillämpning till det förslag till författningar om mått och vikt m. m., som Kungl. Mynt- och Justeringsverket utarbetat, och till den lag av 2 april 1919, som antagits i Frankrike, torde man kunna ha skäl att hoppas på ett praktiskt resultat inom en ej allt för avlägsen framtid.

Om utgångspunkten i Einsteins relativitetsteori.

Av C. A. MEBIUS.

Som bekant följer av *Einsteins* relativitetsteori, att hastigheter större än ljusets icke kunna finnas. I det följande vill jag underkasta denna fråga en närmare granskning.

Einsteins utgångspunkt är följande. Befinner sig i punkten A av rummet ett ur, så kan en i A befintlig observatör uppskatta tiden för en händelse i A:s omedelbara närhet genom att iakttaga läget av visarna på uret samtidigt med händelsen. På samma sätt kan en i punkten B av rummet befintlig observatör bestämma tiden för en händelse i omedelbar närhet av B genom att iakttaga ett i B befintligt ur. Men det är icke utan vidare fastställande möjligt, säger *Einstein*, att jämföra tiden för en händelse i A med tiden för en händelse i B; vi hava hittills blott definierat en »A-tid» och en »B-tid», men ingen för A och B gemensam tid. Denna sista kan nu bestämmas i det man *genom definition* fastställer, att »tiden», som ljuset behöver för att komma från A till B, är lika med »tiden», som det behöver, för att från B komma till A.

Denna definition tänker *Einstein*[1] sig experimentellt utföras på följande sätt. (Uttrycken inom citationstecken äro ordagranna översättningar ur hans arbete.)

»Låt en ljusstråle vid 'A-tiden' t_A utgå från A i riktning mot B. Den reflekteras i B vid 'B-tiden' t_B i riktning mot A och återkommer till A vid 'A-tiden' t'_A. De båda uren gå enligt definitionen lika, om

$$t_B - t_A = t'_A - t_B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [\ldots 1].$$

[1] *A. Einstein:* Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys. Bd. 17. p. 891. 1905. (p. 894.)

Vi fastställa också i enlighet med erfarenheten, att storheten

$$\frac{2\,AB}{t_A - t_A} = V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [\ldots 2]$$

är en universell konstant (ljusets hastighet i tomrummet).»

Einstein tillämpar nu detta på följande fall:

»Låt oss hava en fast stav i vila; låt dess längd vara r» [$AB = A'B'$ fig. 1], »uppmätt med en likaledes vilande meterstav. Vi tänka oss nu stavens axel lagd utefter x-axeln till ett vilande koordinatsystem och att staven därpå erhåller en likformig parallell-translations-rörelse (med hastigheten v) längs x-axeln i dess positiva riktning.»

»Vi tänka oss vidare, att vid de båda stavändarna A och B äro anbragta ur, vilka äro synkrona med uren i det vilande systemet, d. v. s. vilka angiva vid varje tillfälle 'tiden i det vilande systemet' på de orter, vid vilka de just befinna sig. Dessa ur äro således synkrona i det vilande systemet.»

»Vi tänka oss vidare, att vid varje ur befinner sig en observatör, som rör sig med uret, och att dessa observatörer använda på de båda uren det uppställda kriteriet för två klockors synkrona gång. Vid tiden t_A ['tid' betyder här 'tid i det vilande systemet' . . .] går en ljusstråle ut från A, reflekteras i B vid tiden t_B och återkommer vid tiden t'_A till A. Man får då enligt principen för att ljusets hastighet är konstant» [d. v. s. att ljusets hastighet i ett vilande koordinatsystem är densamma, vare sig ljusstrålen utgår från en vilande kropp eller en kropp i rörelse] »följande ekvationer:»

Enligt figur 1

$$t_B - t_A = \frac{r+a}{V} = \frac{a}{v} = \frac{r}{V-v}, \quad . \quad . \quad . \quad [\ldots 3]$$

och enligt figur 2

$$t'_A - t_B = \frac{r-a_1}{V} = \frac{a_1}{v} = \frac{r}{V+v}. \quad . \quad . \quad . \quad [\ldots 4].$$

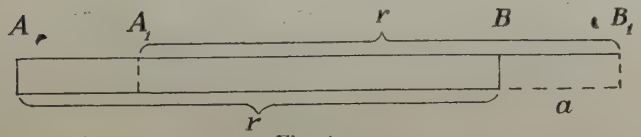


Fig. 1.

Således är $t'_A - t_B$ icke lika med $t_B - t_A$.

»En åskådare», säger *Einstein*, »skulle alltså icke, då han rör sig med staven, finna de båda uren gå lika, under det att en observatör i det vilande systemet skulle förklara, att uren vore synkrona.»

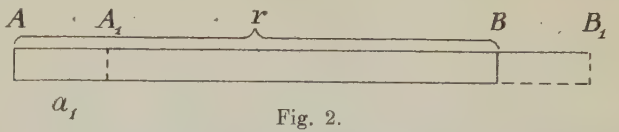


Fig. 2.

»Vi se alltså, att vi icke böra tillmäta begreppet liktidighet en *absolut* betydelse, utan att två händelser, vilka betraktade från ett koordinatsystem äro liktidiga, icke mer äro att uppfatta såsom liktidiga händelser, om de betraktas från ett annat system, som är i rörelse relativt det första.»

Så långt *Einstein*. Jag vill härtill anknyta följande betraktelse. I inledningen till sin avhandling säger *Einstein*, att etern är obehövlig för hans teori; han sätter ej heller något annat i dess ställe. Ljuset, som av alla antages vara en rörelse, skulle således fortplantas t. ex. från solen till jorden genom det tomma intet. Men att en rörelse fortplantas, där ingenting finnes som kan röra sig, är för mig obegripligt. Men om så skulle vara, så följer tomrummet ändock med staven i dess rörelse; och att man erhåller olika tider enligt ekvationerna [3] och [4] synes mig bero därpå, att ljuset i det stillastående tomrummet tillryggalägger olika långa vägar i de båda fallen. *Einsteins* mening är, att man uppfattar tiden på olika sätt i det rörliga och det stillastående systemet.

Vad jag menar kanske framgår tydligare av följande tänkta experiment, som på det närmaste ansluter sig till det nyssnämnda med staven. Antag, att ett stort fartyg framdrives med den konstanta hastigheten v vid fullkomlig vindstilla. Man vill bestämma den tid, som *ljudet* behöver för att fortplanta sig från en punkt A på däcket i närheten av aktern till en punkt B i närheten av fartygets för. Under däcket befinner sig ett slutet rum, som sträcker

sig från A till B och som innehåller luft. Denna luft medföljer fartyget i dess rörelse och är således stillastående i förhållande till fartyget. Man bestämmer också tiden för ljudets fortplantning från A till B under däck. Intet hindrar, att de båda observatörerna över och under däck använda samma klocka vid A för att bestämma, när en ljudsignal avsändes såväl över som under däck, och att de båda observatörerna vid B den ena under, den andra över däck använda samma klocka (eller annan lämplig apparat, t. ex. en registreringsapparat) för att bestämma, när ljudet framkommer till B. På samma sätt observerar man tiden för ljudets fortplantning från B till A såväl ovanför som under däcket. Det är icke tu tal om, att icke tiden för fortplantningen ovan däck från A till B är större än tiden från B till A, och att under däck tiden från A till B är lika med tiden från B till A. Detta beror på, att ljudet i den stillastående luften ovan däck fortplantat sig en större sträcka, då det gått på fartygets däck från A till B, en mindre, då det gått från B till A. Men om man tänker sig de olika tiderna, som observeras ovan och under däck, bero därpå, att observatörerna ovan och under däck hava en olika uppfattning av tiden, så kan man fråga, är detta ett tanketing eller motsvaras det av en verklighet? En sådan tankegång har *Einstein* lagt till grund för sin matematiska utveckling av relativitetsteorien, och grundvalen i denna utgöres av ekvationerna [1] ... [4]. De båda sista underkastar jag en särskild granskning.

Antag, att $v = V$, d. v. s. att stavens hastighet är lika med ljusets. Högra membrum i ekv.

$$t_B - t_A = \frac{r}{V - v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [\ldots 3]$$

blir då oändligt stort. Ekvationen kan ändock anses vara satisfierad, ty t_B är också oändligt stort. Den ljussignal, som utsändes från stavändan A, löper nämligen fram med samma hastighet som stavändan B och kommer därför aldrig fram till någon punkt på x-axeln, där B samtidigt befinner sig.

Är $v > V$, så är högra membrum av [3] negativt, således $t_B < t_A$. Enligt vanlig tolkning skulle detta betyda, att ljuset reflekterades i B, innan det utgått från A, vilket är orimligt. På samma sätt inses, att ekvation [4] är orimlig för negativa värden på v, då $-v > V$. Man får då $t'_A - t_B < 0$, vilket skulle betyda, att ljuset återkommer till A, innan det reflekterades i B.

Det är således klart, att relativitetsteorien icke äger tillämpning, på sådana fall, där hastigheter större än ljusets i tomrum förekomma. Dess giltighetsområde är begränsat, och denna begränsning har implicite sin grund i själva utgångspunkten. *Einstein* anmärker också själv [sid. 903]: »Für Überlichtgeschwindigkeiten werden unsere Überlegungen sinnlos.»

Det ligger även en viss godtycklighet däruti, att *ljus*signaler användas för att bestämma den förut omnämnda för A och B gemensamma tiden. Det är lätt att finna skäl för att just sådana valts. Ljusets hastighet är den största experimentellt kända hastigheten, och då denna ingår i de *Maxwell-Hertz*'ska differentialekvationerna, bliva dessa omedelbart användbara för transformation. Men man skulle lika väl kunna uppbygga en kinematik, om i definitionen av den för A och B gemensamma tiden användes *ljudet* i stället för ljuset. Genom definition skulle då fastställas, att den »tid», som ljudet behöver för att komma från A till B, är lika med den »tid», som det behöver för att komma från B till A etc. En sådan kinematik skulle emellertid hava en ganska liten omfattning, då alla fall vore uteslutna, vid vilka hastigheter större än ljudets förekomma. I ekv. [2] ... [4] betydde då V ljudets hastighet.

Man om man nu verkligen använder ljussignaler och ville experimentellt tillämpa definitionen, så hade man att göra med ljusets hastighet i luft och icke i tomrum. Ljusets hastighet i vakuum skulle i en på sådant sätt härledd relativitetsteori icke hava någon existensmöjlighet.

Det är därför klart, att om man ville ändra relativitetsteorien därhän, att den bleve allmängiltig, så skulle de

använda signalerna fortplantas med oändligt stor hastighet V. Detta skulle emellertid för teorien vara ödesdigert. Om x, y, z, t bestämma ort och tid för en händelse i det vilande koordinatsystemet och ξ, η, ζ, τ relativt till ett rörligt koordinatsystem, som rör sig med den konstanta hastigheten v så, att x- och ξ-axlarna sammanfalla och de andra axlarna äro parvis parallella, så bevisas, att följande transformationsekvationer äro uppfyllda:[1]

$$\tau = \beta\left(t - \frac{v}{V^2}x\right); \quad \xi = \beta(x - vt); \quad \eta = y; \quad \zeta = z;$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

För $V = \infty$ övergå ovanstående ekvationer till

$$\tau = t; \quad \xi = x - vt; \quad \eta = y; \quad \zeta = z;$$

d. v. s. till den allmänt brukliga kinematikens formler. Då försvinna de besynnerligheter, som vidlåda relativitetsteorien och vilka äro så stötande för den vanliga uppfattningen, såsom att två händelser, som äro liktidiga, då de betraktas från ett koordinatsystem, icke äro det, då de betraktas från ett annat i förhållande till det första rörligt system; att en fast kropp har en annan längd, då den är i vila, än då den är i rörelse; att om två ur, som befinna sig på samma ställe, gå alldeles lika, och det ena förflyttas längs en sluten linje tillbaka till sin utgångspunkt, det efteråt icke längre går lika med det andra; att lagen om hastighetsparallellogrammen icke gäller exakt. Men då störtar också hela den så snillrikt uttänkta och så skickligt formulerade lärobyggnaden samman. Besynnerligheterna uppstå just därigenom, att relativitetsteorien icke är allmängiltig, utan endast approximativ, och de minskas i samma mån som approximationen drives längre, d. v. s. i den mån de för definitionen på liktidighet använda signalernas fortplantningshastighet V närmar sig oändligheten.

Vad jag med denna undersökning åsyftat, och vad jag vill ha fastslaget, är följande. Om en åskådning av ett

[1] *Einstein*, l. c. sid. 902.

fenomen leder till ett sådant resultat, att hastigheter större än ljusets måste finnas, så kan relativitetsteoriens motsatta resultat icke anföras såsom bevis mot denna åskådnings riktighet. Det motsatta resultatet beror på den inskränkning i giltighetsområdet, som införes i relativitetsteorien genom själva grunddefinitionen, således genom en hypotes, och är icke bevisat bero på någon motsvarighet i verkligheten.

Det är icke min mening med denna kritik att vilja påstå, det relativitetsteorien helt och hållet och alla dess resultat äro felaktiga. Långt därifrån; en approximativ teori kan leda till riktiga resultat. Och det länder *Einstein* till den största ära att med sin relativitetsteori hava förklarat den sekulära förflyttningen av perihelium i planeten Merkurius' bana och att hava förutsagt ljusstrålarnas avböjning i närheten av solen. Men jag föreställer mig, att en teori skall kunna utarbetas, som förklarar dessa och andra förhållanden, utan att åtföljas av besynnerligheter, sådana som de omnämnda.

*

Jag vill återupptaga exemplet med fartyget, som jag nu tänker mig framdrivas i en rätlinig kanal under fullkomlig vindstilla med den konstanta hastigheten v. Jag tänker mig vidare, att observatörer befinna sig vid fartygets mitt, en vid C under däck, en vid C_1 på däck och dessutom en vid C_2 på stranden av kanalen, och att den sista befinner sig mitt för de båda andra vid tidpunkten t. Antag nu, att i detta ögonblick vid A_1 och B_1 samtidigt avlossas två skott vid en öppning i däcket på vardera stället, så att ljudet och ljuset kunna fortplantas och iakttagas såväl under däck och ovanpå detsamma som på stranden. Avståndet mellan fartyget och stranden anses vara utan betydelse. Ljudet av de båda skotten komma samtidigt till C; det har gått lika långa sträckor AC och BC i den i förhållande till fartyget stillastående luften under däck. Ljudet kommer också samtidigt till C_2 av

samma skäl $A_2C_2 = B_2C_2$. Men om fartyget framdrives i riktningen AB, kommer ljudet från B_1 till observatören vid C_1 *förr* än ljudet från A_1, emedan han i den stillastående luften ovan däck har närmat sig B_2 ett stycke under den tid, ljuden äro på väg. Observatörerna vid C och C_2 finna, att de båda skotten voro liktidiga. Men för observatören vid C_1 förefaller det, som om de icke varit liktidiga. Härpå beror den omständigheten, som *Einstein* uttrycker så, att begreppet liktidighet icke får tillmätas någon *absolut* betydelse. Men drager observatören vid C_1 av sin iakttagelse den slutsatsen, att de båda skotten icke voro liktidiga, så är detta ett *felslut*, och tager han i beräkning de olika väg-

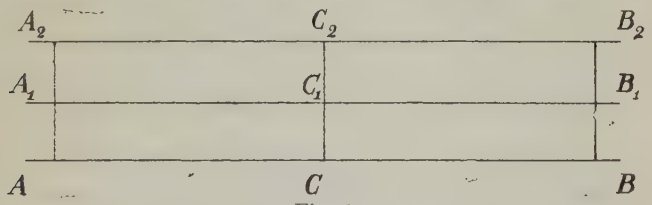


Fig. 3.

sträckor, som ljuden från B_1 och A_1 tillryggalagt för att komma till C_1 i den stillastående luften ovan däck, så skall även han finna, att de båda skotten voro liktidiga. Tidskillnaden mellan de båda ljudsignalernas ankomst till C_1 från B_1 och A_1 kan ju vara nog så märkbar, i betraktande av att ljudet fortplantar sig tämligen långsamt. Hade han i stället för ljudet iakttagit ljuset från de båda skotten, skulle tidskillnaden mellan de båda ljussignalernas ankomst till C_1 varit betydligt mindre. Skotten skulle hava förefallit honom mindre oliktidiga. Men skulle man hava haft tillgång till ett system av signaler, som fortplanta sig med oändligt stor hastighet, så skulle observatören vid C_1 lika väl som observatörerna vid C och C_2 uppfatta de båda företeelserna såsom liktidiga.

Om Einsteins speciella relativitetsteori.

Av C. W. OSEEN.

Redaktionen har haft vänligheten att sätta mig i tillfälle att på förhand taga kännedom om prof. Mebius' ovanstående uppsats. Jag hoppas, att den högt skattade författaren icke skall illa upptaga, om jag till hans framställning knyter några anmärkningar. Alla bildningens vänner äro säkert överens därom, att intet bör försummas, som kan sprida ljus över relativitetsteoriens uppfattning av världen.

Jag vill först uttala mitt instämmande i den sats, som prof. Mebius med sin undersökning vill bevisa, den, att om erfarenheten leder till det resultatet, att en överljushastighet finnes, relativitetsteoriens motsatta åsikt icke kan anföras som bevis häremot. Men jag vill gärna samtidigt framhålla, att ännu intet faktum är funnet, som tvingar till antagandet, att en fysisk verkan kan fortplanta sig med större hastighet än ljuset. Den omständigheten, att man hos β-strålarna kunnat fastställa hastigheter mycket nära c, men aldrig över c, kan kanske tvärtom anses som ett skäl att acceptera relativitetsteoriens utsago.

Till stöd för sin sats betraktar prof. Mebius ett förlopp, som äger analogi med det, som enligt Einstein, tvingar till uppgivandet av en enhetlig tid, gemensam för alla. Vad prof. Mebius med sitt exempel vill visa, är, om jag förstår rätt, att de av Einstein framhållna fenomenen kunna tydas på ett sätt, som överensstämmer med det före Einstein vanliga betraktelsesättet i fysiken, och att de alltså icke nödvändiggöra den radikala omvälvning, som relativitetsteorien innebär. Jag vill beträffande denna punkt

framhålla, att den nämnda analogien endast då är fullständig, om man antar, att det vid ljusets utbredning i tomrummet finns något, som spelar samma roll som luften vid ljudets utbredning, eller med andra ord om man antar existensen av en eter. Tror man icke på en eter, då brister analogien i den viktigaste punkten, då finns ingen annan väg att gå än den Einstein anvisat. Jag tror nu icke, att det är möjligt att bevisa att etern icke existerar. Men det synes mig önskvärt, att de som hylla eterteorien skänka tillbörligt beaktande åt det skäl, som gjort att vetenskapen i stort uppgivit denna teori. Det kan uttryckas i få ord: Vetenskapens historia visar, att denna teori är ofruktbar. Den är på andra punkter i elektrodynamiken och optiken onödig. Att införa den blott för att undgå relativitetsteorien, det har synts de flesta forskare stå i strid med den tankeekonomi, som är nödvändig för vetenskapen.

Prof. Mebius anför ett skäl för bibehållandet av eterbegreppet. Utan etern kan ljuset icke uppfattas som rörelse. — Jag måste uttala mitt beklagande, att prof. Mebius här kommit att använda ordet »rörelse», som säkert icke återger hans verkliga mening. »Periodisk ändring av det elektromagnetiska fältet» är säkert en mer adekvat beteckning även av prof. Mebii åsikt. En sådan ändring kräver emellertid ingen eter för att kunna fortplanta sig. Något finns det mellan solen och jorden, men vad? Elektromagnetisk energi! Jag påstår icke, att denna allmänt hyllade åsikt är fri från svårigheter. I min undervisning har jag många gånger haft anledning att framställa dem. Om dessa svårigheter skola tvinga till uppgivande av denna uppfattning, är emellertid ännu en öppen fråga. Intet tyder på, att de skola föra till en eterns renässans.

Prof. Mebius gör gällande, att det ligger en godtyckligheti däri, att just ljusets fortplantning i tomrummet lagts till grund vid bestämningen av de transformationer, som föra från ett berättigat koordinatsystem till ett annat. Andra fenomen, t. ex. ljudets fortplantning eller ljusets fortplantning i en kropp kunna med samma rätt användas

härtill. — Jag vill gärna instämma i denna mening. Jag vill blott tillägga en sak. Vilket fenomen som hälst kan användas för bestämningen av transformationerna, *blott man känner det i grund och botten.* Belysande är här det av prof. Mebius framdragna exemplet, ljusets utbredning i en kropp. Prof. Mebius tänker här uppenbarligen på det förhållandet, att en periodisk vågs fortplantningshastighet i en kropp är en annan än i vakuum. Vad han tänker på är alltså den s. k. fashastigheten. Men den hastighet, varmed Einstein i sin teori opererar, är signalhastigheten, den hastighet, varmed en vågfront fortskrider i en kropp. Och *denna* hastighet är den samma i en godtycklig kropp som i vakuum. En matematisk utredning av Sommerfell har till syfte att klargöra detta. Utan all matematik kan man emellertid lätt se, att det förhåller sig så. En kropp består ju av ett stort antal atomer, skilda av mellanrum. Faller en våg in, kan den alltid finna väg genom dessa mellanrum. Dess front rör sig i kroppen med samma hastighet, c, som ljuset har i tomrummet.

Beträffande ljudets fortplantning vill jag först framhålla den starkt approximativa karaktär, som den vanliga teorien härför har. Tar man hänsyn till den inre friktionen t. ex., så erhåller man ingen ändlig fortplantningshastighet för en ljudvåg. Jag vill emellertid hellre se saken från kinetisk synpunkt. I varje volymelement av en gas finnas atomer med alla möjliga hastigheter. Sker en störning någonstädes i gasen, så beröras alla atomerna därstädes av denna. De bära bud åt alla håll om störningen. Då nu alla möjliga hastigheter äro representerade, så kan man icke uppge någon bestämd fortplantningshastighet för den våg som störningen förorsakar, *för så vitt* man icke accepterar relativitetsteorien och därmed pålägger atomerna villkoret att aldrig ha större hastighet än c. I så fall kan det sägas, att budet om störningen fortskrider åt alla håll med hastigheten c. — Vad relativitetsteorien påstår, är, att lagen för det komplicerade fenomenet är densamma, vilket berättigat koordinatsystem

man än använder. Det är riktigt, att man då ur fenomenet måste kunna beräkna transformationerna. Detta måste man kunna, men blott om man känner fenomenet i alla dess detaljer. De flesta fysiska fenomen äro nu så komplicerade, att man icke kan hoppas uppnå denna fullständiga kännedom om den. Det är detta, som ger en företrädesställning åt det enklaste av alla fenomen, ljusets utbredning i vakuum.

Jag vill tillägga ännu några ord till belysning av denna punkt. Då man principiellt har rätt att använda varje fenomen till bestämning av transformationerna, så kan man ju t. ex. använda rörelseekvationerna för en materiell punkt härtill. Skriver man dessa i den Newtonska formen, blir resultatet transformationsformlerna:

$$\tau = t,\ \xi = x - vt,\ \eta = y,\ \zeta = z.$$

Men om den speciella relativitetsteorien är riktig, så lyder icke rörelsen de Newtonska lagarna. Den lyder i stället lagarna:

$$\frac{d}{dt}\frac{m\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = X, \quad \frac{d}{dt}\frac{m\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = Y,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = Z,$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Och om vi nu söka de transformationer, som överföra dessa ekvationer i andra av samma form, då finna vi just de Einsteinska. Det visar sig alltså, att en uttömmande kännedom om ett fenomens alla detaljer är nödvändig för att man ur det samma skall kunna härleda transformationsformlerna.

Linjeblixten.

Av GUSTAF GRANQVIST.

(Föredrag hållet vid Jubelpromotionen i Uppsala 1919.)

För ett hundra och sjuttio år sedan var blixtens natur obekant. Personer funnos visserligen, som förmodade, att den hade något samband med de gnistor, som uppkomma, då man gnider en glasstav och vilka kallades för elektriska. Men något bevis härför fanns ej.

Att blixten icke är något annat än en stor elektrisk gnista visades först i början av 1750-talet. Det första beviset härför tillskrives i allmänhet den vittomfattande boktryckaren i Filadelfia, Benjamin Franklin. Denne man, som blev en statsman av första ordningen, skulle utan tvivel blivit en ledande forskare inom den experimentella fysiken, om han levat i en lugn tid och icke under det stora amerikanska krigets stormiga dagar. Endast tolv år sysselsatte han sig med elektriska undersökningar, men under denna tid förvärvade han sig ett mästerligt grepp på detta ämne.

År 1753 utförde Franklin sina bekanta försök med drakar, medelst vilka han påvisade förefintligheten av elektricitet i åskmoln. Emellertid hade redan året förut fransmannen D'Alibard, föranledd av Franklins skrifter, utfört liknande försök och oberoende av Franklin hade de Romas vid ungefär samma tid kommit på en liknande idé.

Sina teorier framlade Franklin i brev, som han sände till Europa. I det fjärde av dessa framställer han sin teori om blixten.

»Världshavet,» säger han, »består av vatten, som är en ledare, och av salt, som är en oledare. Så snart friktion uppstår mellan de delar, som ligga nära ytan, uppkommer den elektriska elden.» De vattenpartiklar, vilka härvid lösslitas från den elektricerade vattenytan, bortföra elektriciteten. De häfta vid luftdelar och, eftersom de äro laddade med elektricitet, repellera de varandra och kunna följaktligen icke sammanflyta till droppar. Då de stiga i höjden, bildas moln, som äro i högsta grad laddade med elektricitet. Om ett sådant moln driver mot ett berg, drages det följaktligen mot berget och, om luften är starkt laddad med elektricitet, borttages på en gång den »elektriska elden» från molnet, varvid det blixtrar och åskar häftigt. Vattenpartiklarna, befriade från elektricitet, sammanflyta i droppar och ett häftigt regn faller.

Av Franklins teorier var utan tvivel den, som behandlar blixtens uppkomst, den som syntes minst sannolik. Man må dock betänka, att denna teori är den första, som sökte förklara blixtens uppkomst, och att den framställdes knappt två år efter detta fenomen bevisats vara ett elektriskt fenomen.

De anordningar, Franklin föreslagit för att avleda blixten, nämligen höga jordade metallstänger och högt uppstigande drakar, ledde snart till försök, genom vilka man konstaterade, att ett betydande elektriskt fält finnes i jordatmosfären även vid fullständigt klar himmel. Under nära på ett helt århundrade voro därefter alla undersökningar över luftelektriciteten huvudsakligen inriktade på studiet av detta elektriska fält, på uppställandet av teorier angående dess uppkomst samt orsaken till dess förändringar.

Det är dock först under de senaste decennierna, sedan man vunnit klarhet i de invecklade fenomen, som åtfölja elektricitetens gång genom gaser och sedan de radioaktiva substanserna blivit upptäckta, som de moderna grundföreställningarna över luftelektriciteten blivit utarbetade.

Den största förtjänsten här måste tillskrivas de båda

tyska forskarna Elster och Geitel, vilka år 1899 utarbetade nya undersökningsmetoder härför.

Så långt jordatmosfären varit tillgänglig för observationer har man över allt och vid alla tider funnit den besitta en om ock ringa elektrisk ledningsförmåga. I densamma måste därför liksom i varje annan ledande gas finnas bärare av såväl positiv som negativ elektricitet eller med andra ord, där måste finnas positiva och negativa gasjoner. Det finnes många sätt, på vilka en gas kan joniseras. Elster och Geitel hava visat, att den viktigaste jonisatorn i atmosfären är radioaktiva substanser. Sådana äro påvisade i jorden, i havet, i sjöarna och till och med i atmosfären.

Rent empiriskt är sålunda konstaterat dels en på jonisation beroende elektrisk ledningsförmåga i atmosfären, dels tillvaron av ett elektrostatiskt fält i atmosfärens undre lager, beroende på en anhopning av negativ elektricitet på jordytan och en lika stor mängd positiv elektricitet i luften. Ur dessa två fakta följer, att en vertikal elektrisk ström måste förefinnas i atmosfären. Denna elektriska ledningsström, som neutraliserar de på jordytan och i luften befintliga laddningarna, skulle snart utplåna det elektrostatiska fältet. Man måste därför även antaga tillvaron av ännu en elektrisk ström i motsatt riktning mot ledningsströmmen, den s. k. kompensationsströmmen. Vid alla förklaringar över luftelektriciteten äro dessa båda strömmar primära luftelektriska element. Det skulle här föra oss för långt, att utgående från dessa primära orsaker närmare redogöra för deras sekundära verkningar, bland vilka det elektriska fältet är en.

Blixten uppkommer icke av dessa fält. Härför erfordras betydligt starkare fält och sådana kunna endast uppkomma, om de i atmosfären över allt med varandra blandade gasjonerna av olika tecken skiljas åt, så att åtminstone på ett ställe i atmosfären finnes en betydande samling av joner av samma slag. På frågan hur detta åtskiljande äger rum, måste jag svara, att det veta vi ej

med säkerhet. Flera hypoteser finnas. För två av dem vill jag här redogöra.

Den ena av dessa hypoteser utgår från ett inom fysiken mycket uppmärksammat försök av engelsmannen Wilson, vilket även på andra områden än det här behandlade varit av största betydelse för fysiken. Utvidgas en fuktig gas adiabatiskt, så att expansionen uppgår till mellan 1,25 och 1,3 av den ursprungliga volymen, uppträda de negativa jonerna som kondensationskärnor och små vattendroppar kondenceras på desamma under det att först vid en expansion större än 1,3 både positiva och negativa joner bliva verksamma som kondensationskärnor.

I den varma och fuktiga, kraftigt uppstigande luftström, som alltid finnes före ett åskväder, uppträder på grund av den adiabatiska expansionen först en avkylning förbunden med utfällning av fuktighet på stoftpartiklar. Denna process motsvarar t. ex. bildandet av ett tätt kumulusmoln. Då expansionen uppnått ett tillräckligt högt värde, bliva de negativa jonerna verksamma som kondensationskärnor och en ny kondensation äger då rum mestadels i form av isnålar under bildande av ett cirrusmoln, då i regel temperaturen härvid redan sjunkit under 0 grader. Härmed blir tydligen en separation av de positiva och negativa laddningarna inledd, ty de negativa jonerna belastade med kondensationsprodukterna bliva efter i den uppstigande luftströmmen under det att de positiva jonerna stiga högre och därefter väl genom sitt eget fält eller genom horisontella luftströmmar förda åt sidan.

Mot denna hypotes, som framställts av Gerdien, har den anmärkningen gjorts, att det synes osannolikt, att en uppstigande luftström på detta sätt skulle kunna hopsamla en så stor mängd joner, att ett elektriskt fält på 10,000 volt per cm. erhålles, vilket är nödvändigt för inledande av en elektrisk urladdning. Vid en jonladdning motsvarande i elektrostatisk enhet per kub.-m., vilket är ungefär det normala, måste en luftpelare av icke mindre än

27 km:s längd passera ett horisontellt kondensationsskikt och därvid avgiva samtliga negativa joner för att på skiktets gränsyta ett elektriskt fält av ovan nämnd styrka skulle uppkomma.

Enligt den andra hypotesen, som är framställd av engelsmannen Simpson, skulle i den häftigt uppstigande fuktiga luftströmmen på grund av avkylningen bildas vattendroppar, som flyta tillsammans och bilda större droppar. Lenard har nu visat, att droppar endast till en viss storlek kunna vara stabila. Dessa droppars stationära sluthastighet i luft vid fritt fall är 8 m/sek. I en uppstigande luftström av denna hastighet förhindras alltså alla bildade droppar att falla och de större sönderfalla i mindre. Vid detta sönderfallande upptaga enligt försök utförda av Simpson dropparna positiva och luften negativa joner. Genom ett upprepat sönderfallande av stora droppar, som bildats genom sammanflytning av mindre, uppträder sålunda en positiv elektricering av vattnet och en negativ av luften. De negativa bärarna äro till en början gasjoner, som bortföras av luftströmmen och som enligt Simpson snart lagra sig på molnelement, varigenom deras rörlighet minskas.

Enligt den Simpsonska teorien är alltså orsaken till de elektriska laddningarna elektricitetsutvecklingen vid söndersmulningen av de droppar, som bildats vid kondensationen. Däremot är den mekanism, medelst vilken laddningarna åtskiljas, densamma som i Gerdienska teorien: nämligen de lättare bärarnas, här de negativa jonernas, bortförande genom den uppstigande luftströmmen. Genom antagandet att de negativa jonerna äro bundna vid molnelement (vattendroppar) och sålunda hava en mindre specifik hastighet i elektriska fält än normala joner, fordrar denna teori en mindre hastighet hos den uppstigande luftströmmen för att genom separation av jonerna åstadkomma ett tillräckligt intensivt fält för urladdning än den förra teorien och i själva verket hava de överslagsräkningar, som Simpson utfört, givit tillfredsställande resultat, ehuru

visst icke invändningar även gent emot denna teori saknas.

Har nu emellertid av en eller annan anledning en större mängd elektricitet blivit samlad vid bildandet av ett moln och elektriciteten därstädes erhållit en tillräckligt hög spänning, inträffar en urladdning vanligen i form av en linjeblixt, vilkens egenskaper vi i det följande skola behandla.

Linjeblixten är en intensiv elektrisk urladdning längs en mycket smal bana. Den förbinder antingen ett moln med jorden eller tvenne molnpartier med varandra. Understundom kan den utgå från den övre ytan på ett moln upp i den för övrigt klara himlen.

Blixtbanans längd varierar mellan några hundra meter upp till i undantagsfall 50 km. Genomsnittslängden torde vara 2 till 3 km., motsvarande medelavståndet mellan cumuli-nimbimolnens undre yta och jordytan.

Blixtens spektrum är ganska noga undersökt bland andra av Kundt, Schuster och Piccering. Det är ett linjespektrum, vilket visar, att temperaturen i blixtbanan måste vara mycket hög. De spektrallinjer, som förekomma i blixtspektrum, tillhöra kvävets, syrets, vätets, argons och en del andra ädelgasers spektra och visar alltså att ljusemissionen från blixten utgår från glödande gaser av dessa ämnen.

Försök utförda med hastigt roterande skivor, på vilka en vit linje dragits i radiens riktning på den för övrigt mörka skivan, och vilka skivor belysts av blixten, hava visat, att den tid blixten varar är utomordentligt kort samt att blixten i allmänhet ej består av en enda urladdning utan av flera på varandra följande urladdningar.

De mest upplysande undersökningar i detta avseende hava utförts av Walter i Hamburg, vilken härvid betjänat sig av en fotografikamera, som roterat omkring en vertikal axel. Om en blixt, som består av flera partialurladdningar fotograferas med en dylik kamera, är det tydligt, att de skilda urladdningarna bliva avbildade skilda från var-

Fig. 1.

andra på plåten. Genom studiet av en dylik fotografi är det möjligt både att följa blixtens olika utvecklingsskeden, som ock att beräkna den tid, som förflutit mellan tvenne urladdningar, ja till och med den tid en enda partialurladdning varat genom en enkel uppmätning av avstånden på plåten mellan respektive avbildningar av urladdningarna och deras bredd under förutsättning, att man känner rotationshastigheten och kameraobjektivets focaldistans.

Fig. 1 är en dylik fotografi tagen av Walter vid en urladdning. Rotationsriktningen har varit sådan, att de bilder, som ligga till vänster äro till tiden föregående de, som ligga till höger. Av figuren se vi, att blixten icke är färdig i ett slag, utan att vägen för densamma först banas av en serie föregående urladdningar, vilka uppträda stötvis och samtidigt utgå från både den positiva och den negativa sidan. Dessa förurladdningar, som vi vilja kalla dem, bliva längre och längre för var gång till dess de slutligen sammanträffa. Först sedan en brygga på detta sätt blivit bildad, äger huvudurladdningen rum.

De förurladdningar, som utgå från den positiva (å fig. den översta) sidan äro alltid längre än de, som utgå från den negativa. De äro även betydligt mera grenade än de negativa, så att man kan säga, att de positiva urladdningarna hava den större förtjänsten för åstadkommandet av blixtbanan.

På bilden gå de särskilda förurladdningarna nästan

parallellt med varandra. Detta förhållande är naturligtvis så att förstå, att varje av dessa urladdningar först begagnar den väg, som dess föregångare banat, och att dess egen banbrytande verksamhet först börjar vid slutet av den förras bana. Vid denna stötvisa förberedelse till blixtbanan söker elektriciteten så att säga trevande sin väg

Fig. 2.

genom luften, i det den i synnerhet på den positiva sidan bildar s. k. kvasturladdningar åt flera riktningar, vilkas gren eller grenar den följande urladdningen vanligen följer.

Sedan på detta sätt en ledande förbindelse blivit uppnådd mellan den positiva och negativa sidan, äger huvudurladdningen rum genom den så preparerade banan. Även denna försiggår vanligen ej i ett slag utan består av en

serie partialurladdningar, som bruka följa på varandra på lika tider (se fig. 2, förperioden har på grund av urladdningarnas ljussvaghet här icke framkommit). I huvudurladdningen är strömstyrkan mycket stor och urladdningen har därför karaktären av en s. k. bågurladdning, d. v. s. följer samma lagar som urladdningen mellan kolen i en båglampa. Någon tid efter det huvudurladdningen slutat, brukar en mera ensamt stående urladdning uppträda genom samma bana, den s. k. efterurladdningen.

De här behandlade urladdningsfenomenen utspelas under en mycket kort tid. Tiden för hela förperioden, d. v. s. för åstadkommandet av blixtbanan, är omkring $\frac{1}{50}$ sekund och huvudurladdningen med dess olika stadier varar under några hundradels eller tusendels sekunder.

Toepler har först påvisat den stora analogien mellan dessa urladdningar och de långa s. k. glidande urladdningarna. Dessa senare äro urladdningar, som kunna framställas utefter en oledares eller en halvledares yta. Urladdningens väg kan här, som Lichtenberg först visat, bestämmas, om man efteråt beströr ytan med en blandning av pulveriserad svavel och mönja, eller ännu bättre om man låter urladdningen glida utefter en fotografiplåt, som därpå utvecklas. Även dessa urladdningar hava en förperiod, under vilken grenformade strålar utgå från båda elektroderna och vilka stötvis växa i längd, tills en förbindelse mellan elektroderna blivit uppnådd, varefter själva den glidande urladdningen uppträder i den så preparerade vägen.

Synnerligen ingående undersökningar över dessa glidande urladdningar hava blivit utförda såväl av deras upptäckare Toepler som även av den danske fysikern P. O. Pedersen, undersökningar, som i hög grad bidragit till förklaringen av de egendomligheter och nyckfulla verkningar blixten företer vid nedslag. Det är omöjligt att här ingå på desamma. En sak må dock nämnas. Sedan under förperioden blixtbanan blivit preparerad, vilket sker genom »jonistion förmedelst stöt», erfordras endast en

obetydlig spänning för att inleda huvudurladdningen. Man kommer därför till fullkomligt felaktiga resultat, om man, som man förut gjort, beräknar spänningsdifferensen mellan blixtens ändpunkter genom en enkel proportionering av de värden, som på laboratorierna erhållas för olika långa gnistor från laddflaskor.

Det undgår icke en uppmärksam iakttagare av ett avlägset åskväder att observera, huru vid blixtbildningen blixten ofta synes glida utefter undersidan av ett moln eller på långa sträckor gå utefter molnytor. Weiker har visat, att betingelserna för uppträdandet av glidande urladdningar äro här desamma som vid halvledare, i det att molnet bildar ett gebit av högre ledningsförmåga under det att den molnet omgivande luften har en mindre ledningsförmåga.

Träffar blixten en berghäll, går den aldrig tvärs genom densamma utan glider utefter någon av dennas ytor, vanligen följande en fuktig sådan. En liknande glidning inträffar även vid nedslag i en oskyddad byggnad, då blixten som bekant följer tak- eller väggytor, isynnerhet om de äro fuktiga. Det skulle föra oss för långt att här närmare ingå på alla de egendomliga verkningar av blixten, som uppträda på »nedslagsstället» och som förr ofta syntes oförklarliga, men numera till stor del lätt kunna förklaras som glidfenomen och kunna eftergöras i smått med glidurladdningar i laboratorierna.

Den elektriska strömmen i huvudurladdningen är riktad antingen från jorden till molnet eller tvärt om. Ur observationer på det höga Sonnblick i Tauen hava Elster och Geitel funnit, att blixten är färgad röd, då strömmen går från jorden till molnet, men blå, om strömmen går från molnet till jorden. Detta överensstämmer även med de spektralundersökningar, som äro utförda över urladdningar med olika strömriktning mellan en torr och en fuktig elektrod.

I allmänhet anses de röda blixtslagen vara våldsammare än de blå. Man har försökt förklara detta förhål-

lande på följande sätt: Som vi förut visat, bildas själva urladdningsbanan under förperioden på så sätt, att både från den positiva och den negativa sidan utgå kvasturladdningar, som stötvis ökas i längd. Den positiva kvasturladdningen är både längre och mera grenad än den negativa. Härav blir vanligen följden den, att från den positiva stammen bildas flera banor, som träffa den negativa sidan i olika punkter. När så huvudurladdningen kommer till stånd, går hela urladdningen från en punkt på den positiva sidan, men grenar sig därefter och upplöses på den negativa sidan i en serie mindre urladdningar. Det är tydligt, att, när så inträffar, måste urladdningens verkningar bliva våldsammare på den positiva sidan, där hela urladdningen går genom en punkt, än på den negativa sidan, som träffas av en serie mindre intensiva urladdningar i olika punkter.

Toepler har sökt lämna en statistik över antalet positiva och negativa blixtslag, d. v. s. då jorden varit antingen anod eller katod. Den metod han härvid använt är så pass intressant, att jag med några ord vill beröra densamma.

Liksom varje elektrisk ström, bildar även blixten ett magnetiskt fält omkring sin bana, vilkets riktning är beroende av strömriktningen. Kroppar, som befinna sig i närheten av blixtbanan, kunna därför bliva magnetiserade. Basalt, fonolit, dolorit och en del andra bergarter kunna lätt bliva magnetiserade av blixten och behålla sedan under långa tider den erhållna magnetiseringen. Toepler anställde därför forskningar efter dylika magnetiska blixtspår inom landområden, där dessa ämnen förekommo i rikligare mängd.

Som exempel må följande fall nämnas. På ett ställe i Geisenberg hade blixten slagit ned i ett träd, omkring vilket en del block av basalt lågo kringströdda. I fig. 3 är B ett tvärsnitt av stammen. Blocken omkring densamma och endast dessa voro samtliga magnetiserade med nordpol och sydpol på sätt som framgår av figuren.

Ur polernas lägen finner man, att det magnetiska fältet från strömmen i blixtbanan varit riktat motsols, och härav följer, att strömmen i blixtbanan varit riktad från jorden till molnet.

Ett annat exempel må även nämnas. Klippor och större block på höjder äro lätt utsatta för blixtbildning. Det egentliga blixtslaget går, som vi förut nämnt, icke tvärs genom blocket utan glider utefter någon av dess ytor. På magnetiserbara block lämnar den då efter sig ett magnetiskt spår, som består däruti att blocket blivit magnetiserat med nordpols- och sydpolsmagnetism inom tvenne områden, som begränsas av en mycket skarpt utpräglad linje, vilken omedelbart angiver blixtbanan. Fig. 4 hänför sig till ett sådant fall, som inträffat i Geltschberg, där blixten »träffat» en fonolitklippa. Blixten har här glidit utefter den streckade linjen och av polernas lägen kan man sluta sig till, att strömriktningen varit från jorden till molnet.

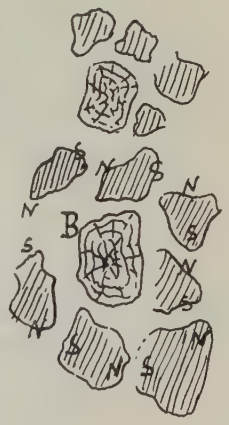


Fig. 3.

Av 92 fall fann Toepler att i 59 fall strömriktningen var från jorden till molnet och i de övriga 33 fallen tvärt om.

Den framstående engelske fysikern Oliver Lodge uttalade på 1890-talet den förmodan, att blixturladdningen skulle hava karaktären av en oscillerande urladdning av samma slag, som den vi erhålla vid urladdningen av en laddflaska. De båda beläggningarna i laddflaskan skulle här motsvara den ena jorden, den andra molnet. Det som talar för denna åsikt är det förhållande, att huvudurladdningen ofta består av en serie urladdningar, som följa tätt efter varandra på lika tider. Emde har teoretiskt diskuterat denna fråga och därvid funnit, att om man använder antagliga värden på molnens elektriska kapacitet och på blixtbanans självinduktionskoefficient, vilka stor-

heter bestämma svängningstiden, så erhålles betydligt mindre värden på denna än vad observationerna skulle leda till. Några experimentella stödjepunkter för denna teori hava vi sålunda ej.

Jag kommer nu slutligen till frågan om strömintensitetens storlek i huvudurladdningen. Att den måste vara mycket stor framgår av blixtens verkningar. När t. ex. en blixt »slår ned» på sandjord, smälter den samman kvartskornen till rör, som kunna bliva flera meter långa, s. k. blixtrör. I allmänhet stå dessa rör vertikalt, förgrena sig stundom åt jorden till. Man kan försiktigt gräva ut dem. De äro invändigt glaserade, utvändigt korniga. Deras diameter varierar mellan 2 cm. till några mm.

Fig. 4.

Så vitt jag vet finnes endast ett enda kvantitativt försök utfört, som tillåter en beräkning av strömstyrkan. Försöket har utförts av Pockels och grundar sig på blixtens magnetiska verkan. En liten omagnetiserad stav av basalt, vilkens dimensioner voro $1{,}5 \times 2 \times 4$ cm., lades några cm. från en åskledare på sådant sätt, att stavens längdaxel skulle komma att ligga parallellt med de magnetiska kraftlinjer, som bildas, om en elektrisk ström genomgår åskledaren. Sedan blixten slutligen en gång träffade åskledaren bestämdes stavens magnetiska moment ävensom styrkan hos det magnetiska fält, som erfordrades för att giva staven ett magnetiskt moment lika stort som det den erhållit. Med kännedom om detta fält kunde lätt maximiströmstyrkan beräknas i åskledaren. Denna hade två jordledningar. I var och en av dessa erhölls en maximi-

strömstyrka av omkring 10,000 amp., vadan maximiströmstyrkan i blixten var 20,000 amp.

Noggranna undersökningar över de maximivärden strömmen i blixtbanan kunna erhålla och den hastighet, med vilken strömmen förändras i densamma, äro både ur teoretisk och praktisk synpunkt av största vikt. Det är dessa storheter som bestämma såväl blixtens värmeverkningar som ock hennes mekaniska, magnetiska och induktionsverkningar. Så länge dessa storheter äro obekanta, kunna vi icke effektivt beräkna dimensionerna och omfånget av de anordningar, som vi behöva för att skydda våra byggnader och industriella anläggningar för blixten. Det är anmärkningsvärt, att forskningen så litet sysselsatt sig med besvarandet av dessa frågor.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälan.

E. S. Johansen. Moderne anskuelser om Elektricitet og Stof. København 1920. Jul. Gjellerups Boghandel. 215 Sider med 44 figurer.

Att de många nya begrepp och det rikhaltiga kunskapsstoff, som det sista decenniets fysiska forskning skapat och frambragt, skyndsamt måste göras tillgängliga för vida kretsar, det är något som utvecklingens egen snabbhet gjort till en fråga för dagen. I detta sammanhang ha vi anledning att glädja oss åt den framsynthet, varmed Kungl. Skolöverstyrelsens Läroverksavdelning i och med sitt program för fysikkurserna för läroverkslärare i Uppsala sommaren 1919 gjort sig till målsman för denna strävan, och i professor C. W. Oseens i bokform utgivna föreläsningar[1] från nämnda sommar äga vi en utförlig och sammanhängande framställning av den teoretiska fysikens utveckling allt intill det sista.

Från slutet av sommaren 1920 föreligger från Danmark en bok av docent E. S. Johansen vid Köpenhamns universitet, däri förf. tagit sikte på en liknande uppgift: att allmänfattligt ge en bild av fysikens nuvande ståndpunkt.

Förf. återger här 5 stycken föredrag, som han med den gemensamma titeln »Moderne anskuelser om Elektricitet og Stof» redan våren 1918 hållit för medlemmarna i Köpenhamns elektrotekniska förening.

Bedömandet av ett föredrags värde, när det efteråt föreligger i tryck, måste bli en vansklig sak i betraktande av en föredragshållares ofta mycket svåra uppgift. Tidsbegränsning och andra hänsyn tvinga honom, till skillnad från föreläsaren, ofta att förbigå givande utvecklingar av

[1] C. W. Oseen, Atomistiska föreställningar i nutidens fysik. Tid, rum och materia. Stockholm 1919. Bonnier.

stort logiskt och matematiskt skönhetsvärde. Docent Johansen har därför med ett tillägg kompletterat dessa föredrag, som upptaga bokens 72 första sidor.

Den största förtjänst måste tillmätas dessa föredrag härutinnan att förf. otvetydigt lyckats att på ett fängslande och klart sätt utan effektsökeri skilja sig från sin svåra uppgift. Man märker väl teoretikern med den vida överblicken, och därför blir boken underhållande för fackmannen, som lätt kan löpa risken att förlora överblicken av utvecklingen under sitt intensiva detaljarbete inom fysikens allt mer expanderande område; den blir en god vägledning för den studerande i fysik och kemi och kan ej undgå att väcka den vakne lekmannens intresse.

Här är endast platsen för en kort översikt av föredragens innehåll. Till behandling upptages: elektricitetens väsen, den elektriska elementarladdningen, elektronen och dess olika fält, och här kommer man in på relativitetsteorien. Framställningen sträcker sig sedan till upptäckten av den positiva atomkärnan; från Thomsens och Rutherfords atommodeller går vägen till Bohrs atomteori, vars viktiga konsekvenser framhävas och belysas.

Vad bokens övriga delar beträffar, så äro de närmast framkomna vid förf:s lärareverksamhet, och jag tvekar ej att betrakta dem såsom bokens för oss betydelsefullaste. Detta särskilt med hänsyn till att även vid flera av våra universitet och högskolor den studerande införes i fysiken genom studiet av Christiansens Lærebog i Fysik, och det tillägg till denna, som förf. här givit måste mottagas av de studerande med glädje. Fysikens studium ställer allt större krav på gedigna matematiska kunskaper, och den av utvecklingen själv framtvingade ökningen i fordringarna för även de lägre examina gör just en bok sådan som denna behövlig.

Medan tillägget I bildar grundvalen för ett djupare förstående av de fem föredragen, behandlar det andra tillägget grunddragen av vektoranalysen samt dennas användning på det elektromagnetiska fältet.

Vidare tillkommer en samling av 88 stycken problem alla åtföljda av lösningar.

I betraktande av vår fullständiga saknad av en modern problemsamling på universitetsstudiernas plan kunna dessa exempel från den moderna elektricitetsläran ej undgå att bli tillbörligt beaktade och värderade av våra studerande. *Kurt Molin.*

Matematiska och fysikaliska uppgifter.

79) Två räta linjer och en punkt O äro givna. En rörlig linje genom O skär de fasta linjerna i P och Q. För vilket läge av OP blir ytan av rektangeln $OP \cdot OQ$ minst? *Ruben Mattson.*

80) Två raka, reguljära n-kantiga prismer med baskanterna a och a_1 hava lika volymer och lika totala ytor. *a*) Sök deras höjder. *b*) Sök förhållandet $\frac{a}{a_1}$ och största möjliga värde på n, om även summan av kanterna skall vara lika i båda.

81) En likbent triangel och en punkt P äro givna. Att genom P draga en rät linje, så att det stycke därav, som faller mellan triangelns ben (eller deras förlängningar) halveras av basen (eller dess förlängning). *X.*

82) Sök gränsvärdet för den oändliga produkten:

$$\cos\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} \cdot \ldots \cos\frac{\alpha}{2^n} \cdot \ldots .$$

83) Diskutera problemet: a kg vatten av $t°$ blandas med b kg is av $-t_1°$. Isens smältningsvärme är ω, dess specifika värme är s. Sök blandningstemperaturen samt mängderna av is och vatten. *M—r.*

84) En elektricitetsmaskin laddar genom att vridas 300 varv en kondensator av $^1/_2$ mikrofarads kapacitet till en potential av 20 000 Volt. Med vilken hastighet skall den vridas för att dess effekt skall bliva 1 Watt?

Lösningar till uppgifterna i h. 4. 1919—20.

67) *För en reguliär 7-hörning gäller att* $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{s}$, *där* d_1 *och* d_2 *äro två olika diagonaler, och* s *är sidan.*

Kallas 7-hörningen $ABCDEFG$, och ptolemeiska teoremet tillämpas på fyrhörningen $ACDE$, så fås omedelbart $d_1d_2=sd_2+sd_1$, eller genom division med d_1d_2s:

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}.$$

Kan även lätt fås genom sinusteoremet.

(Löst av *G. Lindborg, X, B* och *G. B—k.*)

68) *P är en godtycklig punkt på en parabel. O vertex. Visa att sinus för den vinkel tangenten i P bildar med PO alltid är mindre än* $^1/_3$.

Låt parabelns ekv. vara $y^2=2px$, och beteckna OP:s vinkelkoeff. med k. Koordinaterna för P bliva då $\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)$. Enligt en känd sats blir då vinkelkoeff. för tangenten i $P=\frac{k}{2}$. Betecknas den vinkel vars max. sökes med v, få vi således

$$\operatorname{tg} v=\frac{k-\frac{k}{2}}{1+\frac{k^2}{2}}=\frac{k}{2+k^2}.$$

Detta uttryck visas lätt hava ett max. för $k=\sqrt{2}$. Emedan vinkeln är spetsig växer och avtager $\sin v$ och $\operatorname{tg} v$ samtidigt.

Vi få då $\sin v \max.=\frac{k}{\sqrt{k^2+(2+k^2)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\frac{1}{3}$.

Orden »mindre än» i problemet bör utbytas mot $\leqq$.

B.

(Även löst av *X.*)

69) *Rötterna till ekvationen* $x^2+ax+b=0$ *kallas* α *och* β. *Angiv den andragradsekvation som har rötterna* $\frac{1}{\alpha^3}+1$ *och* $\frac{1}{\beta^3}-1$.

Låt den nya ekvationens rötter vara α' och β', så är

$$\alpha'=\frac{1}{\alpha^3}+1,\quad \beta'=\frac{1}{\beta^3}-1,\quad \text{varest}\ \begin{cases}\alpha+\beta=-a\\ \alpha\beta=\ \ b\end{cases}.$$

Då är $$\alpha'+\beta'=\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3}=\frac{-a^3+3ab}{b^3}=-\frac{a(a^2-3b)}{b^3}.$$

$$\alpha'\beta'=\left(\frac{1}{\alpha^3}+1\right)\left(\frac{1}{\beta^3}-1\right)=$$

$$=\frac{1-\alpha^3\beta^3+(\alpha-\beta)[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta]}{\alpha^3\beta^3}=\frac{1-b^3\pm(a^2-b)\sqrt{a^2-4b}}{b^3}.$$

Dennya ekvationen är alltså

$$b^3x^2+a(a^2-3b)x+1-b^3\pm(a^2-b)\sqrt{a^2-4b}=0$$

allteftersom α är den större eller den mindre roten (förutsatt att de äro reela). (Löst av *B.* och *G. B–k.*)

70) *ABC är en triangel, CM dess median. Om triangeln CAM vrides kring CM till dess att A kommer rätt över BC, så blir, om* v *betecknar vinkeln mellan planen,*

$$\cos v=\frac{a^2+3b^2-c^2}{3a^2+b^2-c^2}=\frac{4m^2-a^2+b^2}{4m^2+a^2-b^2}.$$

Drag $ADE\perp CM$, vilken den träffar i D och sidan BC i E, och låt A' vara den punkt, där A faller efter vridningen, så är enligt problemets uppgift $A'E\perp$ planet ABC och $\sphericalangle A'DE=v$, samt således

$$\cos v=ED:A'D=ED:AD=\frac{ED}{DC}:\frac{AD}{DC}.$$

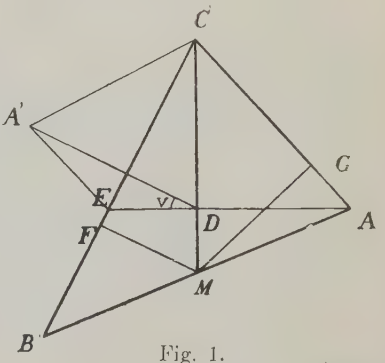


Fig. 1.

Fällas då från M linjerna MF och MG vinkelräta mot BC och AC resp., så är

$$\frac{ED}{DC}=\frac{MF}{FC} \text{ och } \frac{AD}{DC}=\frac{MG}{GC}.$$

Vi hava då:

$$\cos v=\frac{MF}{FC}:\frac{MG}{GC}=\frac{\frac{c}{2}\sin\beta}{a-\frac{c}{2}\cos\beta}:\frac{\frac{c}{2}\sin\alpha}{b-\frac{c}{2}\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\frac{2b-c\cos\alpha}{2a-c\cos\beta}.$$

Men enligt sinus- och cosinusteoremen är

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{b}{a},\ c\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b},\ c\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

Insättes detta, så fås $\cos v=\frac{3b^2+a^2-c^2}{3a^2+b^2-c^2}$, ur vilket satsens senare uttryck lätt fås genom den bekanta medianformeln.

B.

71) *I en triangel vilken som helst är alltid*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{v_a}+\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{v_b}+\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{v_c},$$

då v_a, v_b och v_c äro bissektriserna.

A. Vi hava $T=\frac{bc\sin\alpha}{2}=\frac{v_a c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{v_a b}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

sål. $$2bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=v_a(b+c)\sin\frac{\alpha}{2},$$

varav $$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{v_a}=\frac{b+c}{2bc}=\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}.$$

Om denna formel cykliskt permuteras och de 3 så erhållna formlerna adderas, fås satsen omedelbart.

(B., G. B—k, D. Bratt.)

B. Kallas bissektrisen CV, och från V drages linjen $VD \perp CV$ och som träffar AC i D, samt på CA avsättes $CB' = CB$, så är AB' harmoniskt skuren i C och D. CD är då harmoniska mediet mellan CA och CB' eller mellan CA och CB. Vi få således

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2 \cos {}^{\gamma}/_{2}}{v_c}$$

varefter förfares såsom i föregående. (X.)

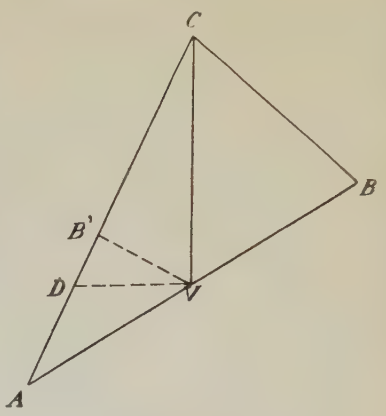


Fig. 2.

C. Om genom V i föreg. figur drages linjen $VE \parallel AC$ och som träffar BC i E, så blir $VE = \frac{v_c}{2 \cos {}^{\gamma}/_{2}}$, och genom de likformiga trianglarna BVE och BAC fås då

$$\frac{v_c}{2 \cos {}^{\gamma}/_{2}} : b = \left(a - \frac{v_c}{2 \cos {}^{\gamma}/_{2}} \right) : a,$$

varur satsen lätt följer. *B.*

D. Tagas CA och CB till axlar i ett snedvinkligt koordinatsystem, så är ekvationen för AB: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Denna måste satisfieras av koordinaterna för V, som båda äro $\frac{v_c}{2 \cos {}^{\gamma}/_{2}}$, varefter forts. som i föregående. *B.*

72) *Bissektriserna till vinklarna i en fyrhörning bilda alltid en inskrivbar fyrhörning, och om den första fyrhörningen är inskrivbar, så äro den andras diagonaler vinkelräta mot varandra.*

Håller man sig till det enklaste fallet, att såväl den givna fyrhörningen som bissektrisfyrhörningen är konvex, och att man blott betraktar bissektriserna till de inre vinklarna, så inses genast satsens förra del, ty av en figur fram-

går omedelbart, att två motstående vinklar i den senare fyrhörningen tillsammans bliva lika med hälften av den förra fyrhörningens vinklar.

Satsens senare del bevisas sålunda:

Låt fyrhörningen vara $ABCD$ (fig. 3), låt AD och BC träffas i E och AB och CD i F. Då träffar bissektrisen EH bissektriserna till D och C i en punkt (den i $\triangle EDC$ inskrivna cirkelns medelpunkt) och likaledes bissektriserna

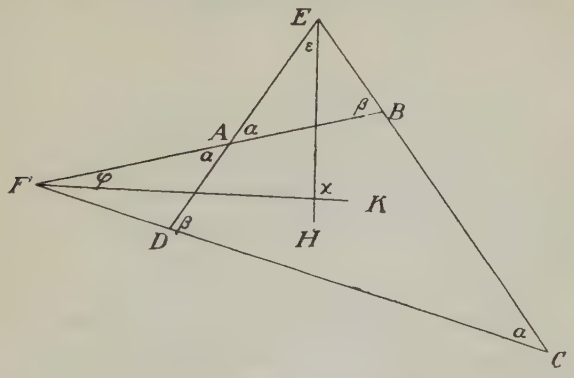


Fig. 3.

till A och B (den till $\triangle EAB$ vidskrivna cirkelns medelpunkt). På snarlikt sätt bevisas, att bissektrisen FK träffar bissektriserna till C och B i en punkt och bissektriserna till A och D i en punkt. Således äro EH och FK bissektrisfyrhörningens diagonaler.

Men då är (med fig:s beteckningar)

$$x=\varepsilon+\alpha+\varphi,\ \alpha+\beta+2\varepsilon=\pi \text{ och } \beta=\alpha+2\varphi,$$

och således $2\alpha+2\varepsilon+2\varphi=\pi$ och $x=\frac{\pi}{2}$.

På snarlikt sätt kunna de övriga fallen bevisas, och man erhåller följande diskussion.

I. *Fyrhörningen är konvex.*

a) De fyra inre bissektriserna bilda en konvex inskrivbar fyrhörning.

b) De fyra yttre bissektriserna bilda en konvex inskrivbar fyrhörning.

c) De inre bissektriserna till två motstående vinklar bilda tillsammans med de andras yttre bissektriser en inskrivbar fyrhörning med två varandra skärande sidor.

d) De inre bissektriserna till två närliggande vinklar bilda tillsammans med de andras yttre bissektriser en inskrivbar fyrhörning med två varandra skärande sidor.

Är den givna fyrhörningen inskrivbar, äro bissektrisfyrhörningarnas diagonaler i *a*), *b*) och *c*) vinkelräta, men i *d*) parallella.

II. *Fyrhörningen har ett inåtgående hörn.*

a) De fyra inre bissektriserna bilda en inskrivbar fyrhörning med två varandra skärande sidor.

b) De fyra yttre bissektriserna bilda en konvex inskrivbar fyrhörning.

c') De inre bissektriserna till två motstående vinklar, en av dem större än 180°, bilda tillsammans med de andras yttre bissektriser en konvex inskrivbar fyrhörning.

c'') De inre bissektriserna till två motstående vinklar, ingen av dem större än 180°, bilda tillsammans med de andras yttre bissektriser en inskrivbar fyrhörning med två varandra skärande sidor.

d') De inre bissektriserna till två närliggande vinklar, en av dem större än 180°, bilda tillsammans med de andras yttre bissektriser en konvex inskrivbar fyrhörning.

d'') De inre bissektriserna till två närliggande vinklar, ingen av dem större än 180°, bilda tillsammans med de andras yttre bissektriser en inskrivbar fyrhörning med två varandra skärande sidor.

III. *Fyrhörningen har två varandra skärande sidor.*

a) De fyra inre bissektriserna bilda en inskrivbar fyrhörning med två varandra skärande sidor.

b) De fyra yttre bissektriserna bilda en inskrivbar fyrhörning med två varandra skärande sidor.

c) De inre bissektriserna till två motstående vinklar bilda tillsammans med de andras yttre bissektriser en fyrhörning med två varandra skärande sidor.

d') De inre bissektriserna till två närliggande vinklar, båda i samma triangel, bilda tillsammans med de andras yttre bissektriser en konvex inskrivbar fyrhörning.

d'') De inre bissektriserna till två närliggande vinklar, en i varje triangel, bilda tillsammans med de andras yttre bissektriser en inskrivbar fyrhörning med två varandra skärande sidor.

Är den givna fyrhörningen inskrivbar, äro bissektrisfyrhörningarnas diagonaler i *a*), *b*) och *c*) parallella, men i *d'*) och *d''*) vinkelräta. *G. Bolinder.*

Till detta problem har signaturen *X* insänt en mycket generell och elegant analytisk-geometrisk lösning. Tidskriftens utrymme och dess egenskap att vara elementär tillåta oss dock ej att införa densamma. *Red.*

Från Fysiska sällskapet i Stockholm.

Sedan Fysiska sällskapet i Stockholm tillsatt en kommitté för att avgiva utlåtande i frågan om vikt såsom massenhet, och denna kommitté till sällskapets sammanträde den 9 oktober 1920 inkommit med utlåtande, beslöt sällskapet att i huvudsaklig överensstämmelse med kommitterades förslag göra följande uttalande:

»Fysiska sällskapet i Stockholm får härmed efter överläggning tillstyrka:

1) *Att ordet* ***vikt*** *endast användes i betydelsen* ***massa,*** *vilken mätes i gram* (*kilogram o. s. v.*).
2) *Att* ***krafter*** *däremot mätas i* ***dyn*** (*megadyn o. s. v.*), *ej i kilogram* (*gram o. s. v.*).
3) *Att den kraft, varmed en kropp attraheras av jorden, betecknas såsom kroppens* ***tyngd*** (*ej vikt*).

4) *Att, om man av hänsyn till äldre beteckningar anser sig behöva uttrycka tyngd eller annan kraft med tillhjälp av det gamla kraftmåttet kilogram, detsamma må betecknas med* ***kilogramkraft,*** *förkortat kgf. (gramkraft o. s. v. där f är förkortning av force = kraft) och således arbetsenheten med* ***kilogramkraftmeter*** *(kgfm.).»*

. . .

Meddelanden från Redaktionen.

Vi erinra om, att alla bidrag, även problem och lösningar, för att kunna inflyta i ett visst häfte måste vara till Red. inkomna före den 1:sta i månaden näst före den, under vilken häftet skall utkomma.

Brevlåda.

W. J. Felet består i att Ni ej angivit minimum ($2\sqrt{2}$) för m, utan blott ett tal (2) som är mindre än detta minimum.

Regningsarters Gyldighedsomraade.

Av Mag. art. E. PALMØ.

At benævnte Størrelser ikke kan multipliceres med benævnte Størrelser, følger af Multiplikationens Væsen.[1] Derimod antages de almindeligt at kunne adderes, subtraheres og divideres indbyrdes, saafremt de kan gøres ensbenævnte. Jeg ved ikke, om nogen tidligere har gjort opmærksom paa de Meningsløsheder, denne almindelige Regel om Henførelse til fælles Benævnelse som Betingelse for den indbyrdes Addition, Subtraktion og Division af uens benævnte Størrelser kan føre til; da jeg for nylig kom til at tænke nærmere over den, efterlod den i hvert Fald hos mig et Problem, hvis Brod jeg først efter adskillig Spekulation blev befriet for. Resultatet kan sikkert interessere flere og skal her fremsættes i al Korthed.

Hvis det var en tilstrækkelig Betingelse for Subtraktion og Division af uens benævnte Størrelser, at de blot forinden Regneoperationen skulde gøres ensbenævnte, saa vilde — da alt kan gives samme Benævnelse — alle Størrelser kunde fradrages fra og deles med hverandre. Eks. 4 Heste — 2 Køer = 4 Dyr — 2 Dyr = 2 Dyr; 4 Heste : 2 Køer = 4 Dyr : 2 Dyr = 2. En Regel, der synes at føre til saadanne Absurditeter som Muligheden af at borttage 2 Køer, hvor der i Forvejen kun er 4 Heste, eller at 2 Køer er indeholdt to Gange i 4 Heste, maa aabenbart trænge til nøjere Eftersyn. Urigtig i alle Tilfælde lader den ikke til at være; thi ved Addition synes den altid indvendingsfri, Eks: 4 Heste + 2 Køer = 6 Dyr; 9 Huse + 7 Agurker =

[1] När detta skrevs hade förf. ännu ej kännedom om de båda uppsatserna härom i denna tidskrifts första årgång.

Red:s anm.

16 Ting. Ligeledes er den tilladelig i mange Tilfælde af Subtraktion og Division, Eks.: 3 Femogtyveører — 2 Tiører = 3 · 0,25 Kr. — 2 · 0,10 Kr. = 0,55 Kr.; 4 m : 2 cm = 400 cm : 2 cm = 200.

Da Reglen saaledes snart viser sig rigtig, snart absurd, er den formodentlig for almindelig affattet, hvilket igen vil sige, at enten selve dens Indhold (Fordringen om at henføre Størrelserne til samme Benævnelse) eller dens Gyldighedsomraade maa reduceres. Saa længe intet nærmere er bestemt, maa den nemlig antages at skulle gælde for alle Arter af Genstande.

For at blive klar over, hvilken Reduktion, der skal foretages, undersøger vi de forskellige Benævnelser. For Kr. og Øre, m, km og cm, kg, hg og g o. s. v. passer Regelen i alle tre Regningsarter, kort sagt: det viser sig, at den gælder uden Indskrænkning for alle vedtægtsmæssige d. v. s. alle nøjaktigt ved vilkaarlig Definition afgrænsede Maalbegreber. For alle andre uens benævnte Størrelser synes den kun at kunne anvendes ved Addition. Men hvis jeg kan sætte 4 Heste + 2 Køer = 4 Dyr + 2 Dyr, hvorfor maa jeg da ikke skrive 4 Heste — 2 Køer = 4 Dyr — 2 Dyr? Lad mig spørge Logikken og Matematikken, om der er noget at indvende mod nogen af disse Ligninger. (Min tredie store Læremester, Erfaringen, siger mig nok, at jeg ikke kan fradrage 2 Køer, hvor der kun er 4 Heste; men hvilken Regel, jeg til Slut skal opstille, angiver den ikke.)

Logisk betragtet er det, jeg i de to ovennævnte Eksempler har foretaget mig for at naa fra venstre til højre Side af Lighedstegnet, at ombytte de to Begreber Heste og Køer med et fælles overordnet Begreb: Dyr. Logikken siger nu, at saadan Ombytning med et overordnet Begreb ingenlunde er tilladelig i alle Tilfælde — erstatter jeg saaledes i Sætningen »Fuglene har Vinger», Fuglene med det overordnede Begreb Hvirveldyrene, kommer jeg til den urigtige Paastand »Hvirveldyrene har Vinger» — men naar saadan Ombytning tør finde Sted, og om den i disse specielle matematiske Operationer er tilladelig eller ej, giver den for-

male Logik naturligtvis ikke Svar paa. Den har altsaa blot belært mig om, at det ikke uden videre er sikkert, at 4 Heste $\pm$ 2 Køer = 4 Dyr $\pm$ 2 Dyr.

Gaar vi nu til Matematikken, saa afviser den Diskussionen om Benævnelserne som sig uvedkommende; Aritmetikken har kun med Talbegreber at gøre. Derimod siger den mig, at Lighedstegnet kun tør bruges, hvor Omvending af Ligningens to Led er mulig. Men saa tør jeg ikke sætte 4 Heste = 4 Dyr; 2 Køer = 2 Dyr, da de omvendte Paastande ikke gælder. Altsaa er det ogsaa urigtigt at skrive 4 Heste $\pm$ 2 Køer = 4 Dyr $\pm$ 2 Dyr. Sætningen: 4 Heste og 2 Køer er 6 Dyr, kan ikke vendes om; den er nemlig ikke som den matematiske Ligning en Identitets- eller Kongruensdom men en Subsumtionsdom.

Den eneste af de tre Regneoperationer, der synes at kunne anvendes paa konkrete uens benævnte Ting, var Additionen. Nu viste ogsaa denne sig utilladelig i matematisk Form, altsaa som anvendt Matematik. Man maa ikke skrive »4 Sønner + 3 Døtre = 7 Børn», thi da Omvending ikke er tilladelig, kan Lighedstegnet ikke med Rette bruges; der maa skrives »4 Sønner og 3 Døtre er (et specielt Tilfælde af) 7 Børn». Dermed er inbyrdes Addition, Subtraktion og Division mellem uens benævnte Størrelser indskrænket til de Maalbegreber, der er udtømmende bestemt ved Definition, altsaa er rene Begreber. Paa dette Omraade gælder da ogsaa den gamle Regel uindskrænket; thi da en Øre er fuldstændig og udtømmende bestemt som $\frac{1}{100}$ Kr. og en Kr. som 100 Øre, har man her Lov at sætte Lighedstegn: 1 Kr. = 100 Øre og omvendt; 1 kg = 1000 gr. og omvendt. Saa er det ogsaa ubestrideligt, at 2 Kr. — 2 Øre = 200 Øre — 2 Øre; 5 hl : 2 l = 500 l : 2 l.

Da det nu er vist, at de tre Regningsoperationer mellem uensbenævnte Størrelser altid gælder for og kun for de konventionelle Maalbegreber, er vi endelig i Stand til at foretage den paakrævede Omskrivning af den gamle almindelige Regel. Den maa lyde saaledes: *At uens benævnte Størrelser kan adderes, subtraheres og divideres ind-*

byrdes efter at være gjort ens benævnte, gælder kun og altid for de ved Definition skabte Maalbegreber, der kan henføres til et fælles definitionsbestemt Maalbegreb. Andre uens benævnte Størrelser kan vel altid sammentælles, men Additionen maa ikke opstilles som Ligning. I en Lærebog i praktisk Regning, maa den tidligere saa ofte anførte Regel ændres derhen: Naar du vil addere, subtrahere eller dividere uens benævnte Størrelser med hinanden ved at forvandle dem til en fælles Benævnelse, maa alle tre eller begge Benævnelser findes i Maalsystemet.

*

Dette er et Eksempel paa, at naar Matematikken, der kun har med »selvskabte» Begreber at gøre, skal anvendes paa konkrete Ting, maa man i nogle Tilfælde først overføre dens Regler paa andre »selvskabte» Begreber (Maalenhederne). Disse sidste Begreber staar da for den almindelige Opfattelse, som Symboler for de konkrete Ting. Men det bliver da egentlig ikke disse sidste i deres fulde sansebare Virkelighed, vi underkaster de matematiske Operationer, men kun saadanne Egenskaber ved dem, som symboliseres af Maalbegreberne. Altsaa Tingenes kvantitative Egenskaber, vil man maaske sige; er det for omfattende en Angivelse af Matematikkens Brugbarhed, at den anvendes paa Sansetingene, saa maa man dog have Lov at paastaa, at den anvendes paa Tingenes Kvanta. Men ovenstaaende Udvikling viser, at denne Bestemmelse ogsaa maa indskrænkes. Hvis en algebraisk Ligning skal have praktisk Betydning, maa man i dens Led ikke indsætte hvilke som helst tællelige Størrelser; men disse maa enten være givne som ensartede, ensbenævnte eller, hvis de er givne som uensbenævnte, opfylde følgende to Betingelser: for det første være Maalbegreber (ikke Konkretioner) og for det andet oven i Købet kunne omsættes til et fælles Maalbegreb. Som man ser: en ret betydelig Indskrænkning af Matematikkens Anvendelser.

Bidrag till läran om tals uppdelning i faktorer.

Av EMIL BJÖRNBERG.

Då jag i våras (1920) bläddrade igenom gamla anteckningar från min första läraretid, fann jag stommen till följande framställning, som jag således i huvudsak sammanskrivit för omkring 35 år sedan. — Av lätt insedda skäl behandlas i densamma endast tal, som sluta på 1, 3, 7 eller 9 och ej innehålla några ensiffriga faktorer.

Sats 1. Varje udda tal utgör en skillnad mellan två hela tals kvadrater, ty

$$2g+1=(g+1)^2-g^2.$$

T. ex.

$19=(10)^2-(9)^2=100-81.\quad 41=(21)^2-(20)^2$ o. s. v.

Är $2g+1$ primtal, kan det blott på förestående sätt skrivas som en skillnad mellan två kvadrater; men om $2g+1$ är sammansatt av två faktorer, finnas två sätt.
T. ex.

$$2g+1=(2a+1)\ (2b+1)=(a+b+1)^2-(a-b)^2;\ (a>b).$$

Således i detta fall

$$2g+1=(g+1)^2-g2=(a+b+1)^2-(a-b)^2.$$

$$91=13\cdot 7=(46)^2-(45)^2=(2\cdot 6+1)\cdot(2\cdot 3+1)=$$

$$=(6+3+1)^2-(6-3)^2=(10)^2-(3)^2.$$

Om $2g+1=(2a+1)\ (2b+1)$, blir $g=a+b+2ab$,

varav framgår, att

$$a+b+1<g+1 \text{ och } a-b<g.$$

Kan man taga reda på dessa mindre tal $a+b+1$ och

$a - b$, d. v. s. faktorernas halva summa och halva skillnad, så kan man också upplösa $2g+1$ i faktorer.

Detta utgör så att säga grunden för följande framställning.

Tydligt är, att om $2g+1$ innehåller mer än två faktorer, kan uppdelning ske på flera sätt. Så kan t. ex. talet 2 431, som är lika med $17 \times 13 \times 11$, skrivas $= 143 \cdot 17 = = 187 \cdot 13 = 221 \times 11$; således också

$$2\,431 = (80)^2 - (63)^2 = (100)^2 - (87)^2 = (116)^2 - (105)^2.$$

Ju flera faktorer ett tal innehåller, desto flera sätt för dess uppdelning finnas, och det bör därför vara lättare att påträffa *ett* sådant, vilket också är händelsen.

*

De udda talen kunna delas i två avdelningar, som må kallas A och B. Till den förra höra 3, 7, 11, 15 o. s. v., vilka äro så beskaffade, att de bliva delbara med 4, om de ökas med 1. Till andra avdelningen höra 5, 9, 13 o. s. v., vilka bliva delbara med 4, om de minskas med 1.

Sats 2. Ett tal från avdelningen A utgör skillnaden mellan en jämn och en udda kvadrat; ett tal från B utgör skillnaden mellan en udda och en jämn kvadrat.

Bevis: $T = (2a)^2 - (2b+1)^2 = 4a^2 - 4b^2 - 4b - 1 \quad \therefore$

$$T+1 = 4(a^2 - b^2 - b).$$

Är åter $T = (2a+1)^2 - (2b)^2$, fås $T - 1 = 4(a^2 + a - b^2)$.

Varje avdelning omfattar fyra klasser, som betecknas med A_1, A_3, A_7, A_9 och B_1, B_3, B_7, B_9, allt eftersom talet slutar på 1, 3, 7 eller 9.

Då var och en av dessa klasser, såsom vi få se, innehåller 4 grupper, skulle man få ej mindre än 32 grupper att behandla, men så många behövas ej på grund av följande

Sats 3. Om ett tal av avdelningen A multipliceras med ett tal av avdelningen B, kommer produkten att tillhöra avdelningen A. Om båda faktorerna tillhöra samma avdelning, kommer produkten att tillhöra avdelningen B.

Bevis för första påståendet:

$t_1 = 4a + 1,$

$t_{11} = 4b - 1.$

$t_1 \cdot t_{11} = 4(4ab + b - a) - 1 \quad \therefore \quad t_1 \cdot t_{11} + 1 = 4(4ab + b - a),$

eller $t_1 \cdot t_{11}$ tillhör avdelningen A.

Andra påståendet bevisas på dylikt sätt.

Vi gå nu att behandla de olika klasserna och börja med A_1. A priori kan man förstå, att till denna klass höra 4 grupper, som betecknas med $A_1(1, 1)$, $A_1(9, 9)$, $A_1(3, 7)$, $A_1(7, 3)$ eller blott (1, 1), (9, 9), (3, 7), (7, 3), allt eftersom talet kan uppdelas i två faktorer, som båda sluta på 1, båda på 9, den större på 3 och den mindre på 7 eller den större på 7 och den mindre på 3.

Intet hindrar, att samma tal hör till två eller flera av dessa grupper, om det innehåller flera faktorer. Så kan t. ex. talet 121 771 skrivas $= 551 \cdot 221 = 4\,199 \cdot 29 = 7\,163 \cdot 17 = 377 \cdot 323$ och kan behandlas efter vilken som helst av de 4 grupperna.

Till klass A_1 höra

$11 = 10 \cdot 1 + 1$

$31 = 10 \cdot 3 + 1$

$51 = 10 \cdot 5 + 1$ etc.

eller tal av formen $10(2m + 1) + 1 = 20m + 11$. Lätt inses således, att ett tal T i denna klass kan skrivas $T = 20m + 11$ och utgör skillnaden mellan en jämn och en udda kvadrat.

En jämn kvadrat slutar på 0, 4 eller 6;
» udda » » » 1, 5 » 9.

Om ett tal, som har slutsiffran 1, skall bliva en jämn kvadrat genom ökning med en udda kvadrat, så måste den senare sluta på 5 eller 9. I förra fallet kommer den jämna kvadraten att sluta på 6 och således dess tal (kvadratrot) på 6 eller 4, under det att slutsiffran i udda kvadratens rot är 5. I senare fallet kommer den jämna kvadraten att sluta på 00 och dess rot på 0 samt den udda kvadratens rot på 3 eller 7. Således få vi följande grupper:

$$(10x+6)^2-(10y+5)^2=20m+11;\ (1,1).$$
$$(10x+4)^2-(10y+5)^2=20m+11;\ (9,9).$$
$$(10x)^2\ \ -(10y+3)^2=20m+11;\ (3,7).$$
$$(10x)^2\ \ -(10y+7)^2=20m+11;\ (7,3).$$

Gruppens (1, 1) ekvation transformeras lätt till

$$x^2-\frac{m-6x}{5}=y(y+1);\ \ldots\ldots\ 1).$$

Gruppens (9, 9) till $x^2-\frac{m+1-4x}{5}=y(y+1)\ \ldots\ 2).$

Dessa ekvationer äro ju indeterminerade, men då de i dem ingående obekanta skola vara hela tal, kunna de lösas. För övrigt märkes, att emedan högra membrum är ett jämnt tal, som slutar på 0, 2 eller 6, så måste termerna i vänstra membrum vara av samma slag, d. v. s. båda jämna eller båda udda. Andra termen är jämn eller udda allt eftersom m resp. $m+1$ är ett jämnt eller udda tal. Således måste x i detta hänseende vara av samma slag som m resp. $m+1$.

Grupperna (3, 7) och (7, 3) behandlas ej särskilt, dels för att man ej skall få alltför många ekvationer, dels därför att dit hörande tal genom multiplikation med 21 överföras till resp. (9, 9) och (1, 1).

Vid denna multiplikation »associerar» sig så att säga 3 med den större och 7 med den mindre faktorn, varigenom faktorerna bliva mera jämnstora.

Som det ej på förhand kan avgöras, till vilken grupp ett tal hör, måste man försöka först med (1, 1) och sedan med (9, 9) eller tvärt om. Fås ej resultat, multipliceras med 21, varefter ånyo försökes med samma ekvationer.

Ex. 1. Talet 34 571 hör tydligen till klass A_1. Sättes det $=20m+11$, fås $m=1\,728$, som insatt i 1) ger

$$x^2-\frac{1\,728-6x}{5}=y(y+1).$$

Enligt föreg. måste x sluta på 8. Insättes 8 i st. f. x

i andra termen blir den $\frac{1\,728-48}{5}=336$; således vänstra membrum

$$x^2-336, \text{ som måste vara } \lesseqgtr 0 \therefore$$

$$x \lesseqgtr \sqrt{336} \lesseqgtr 18.$$

Försökes med 18, fås

$$324-\frac{1\,728-6\cdot 18}{5}=324-324=0=y(y+1) \therefore y=0.$$

Man har således $x=18$, $y=0$, som insatta i (1, 1) giva $(186)^2-(5)^2=191\times 181 \therefore 34\,571=191\times 181$.

Här bör observeras, att $y=0$ endast i det fall, att skillnaden mellan faktorerna är 10.

Ex. 2. $970\,171=20m+11 \therefore m=48\,508 \therefore$

$$x^2-\frac{48\,508-6x}{5}=y(y+1).$$

Även här måste x sluta på 8. Insättes 8 i st. f. x i andra termen, blir v. membrum $x^2-9\,692 \therefore x \lesseqgtr \sqrt{9\,692} \lesseqgtr 98, \ldots$ Sättes $x=98$, fås $9\,604-9\,584=4\times 5=y(y+1) \therefore y=4$ och $x=98$, som insatta i (1, 1) giva

$$(986)^2-(45)^2=1\,031\cdot 941=970\,171.$$

Ex. 3. $50\,071=20m+11 \therefore m=2\,503$

och $$x^2-\frac{2\,503-6x}{5}=y(y+1).$$

För att andra termen skall vara helt tal, måste x sluta på 3. Insättes 3 i st. f. x i andra termen, blir vänstra membrum x^2-497 som bör vara $\lesseqgtr 0 \therefore x \lesseqgtr \sqrt{497} > 22, 2 \ldots$ och då x skall sluta på 3, måste det vara 23 (eller 33, 43 etc.). Försökes med $x=23$, fås $529-473=y(y+1)$ eller $y(y+1)=56=7\cdot 8$. Insättes i (1, 1) fås

$$50\,071=(236)^2-(75)^2=311\cdot 161.$$

Så lätt som i föreg. ex. fås x-värdet blott då faktorerna äro något så när jämnstora.

Här ett ex., där så icke är förhållandet.

Ex. 4. $29\,171 = 20m + 11 \therefore m = 1\,458.$

$$x^2 - \frac{1\,458 - 6x}{5} = y(y+1);$$

x måste sluta på 8.

Såsom i föregående ex. får man $x^2 - 282 \gtrless 0 \therefore x > \sqrt{282} > 16 \therefore$ bör x vara $= 18$ eller något större tal på 8, således 28, 38, 48 etc.

Vid prövning når man resultat först då $x = 48$; man får då

$$(48)^2 - \frac{1\,458 - 288}{5} = y(y+1) \text{ eller}$$

$$2\,304 - 234 = y(y+1) \therefore y(y+1) = 2\,070 = 45 \times 46.$$

Således $x = 48$, $y = 45$, som giva

$$29\,171 = (486)^2 - (455)^2 = 941 \times 31.$$

Här är första faktorn c:a 30 gånger större än andra.

Ex. 5. $463\,571 = 20m + 11 \therefore m = 23\,178.$

Här får man ej resultat med (1, 1).

Användes (9, 9) fås

$$x^2 - \frac{23\,179 - 4x}{5} = y(y+1).$$

x måste enligt föreg. sluta på 1 $\therefore$

$$x^2 - \frac{23\,179 - 4}{5} = y(y+1) \text{ eller}$$

$$x > \sqrt{4\,635} > 68,0 \ldots \therefore x = 71 \text{ (el. } 81, 91 \text{ etc.)}$$

$$(71)^2 - \frac{23\,179 - 4 \cdot 71}{5} = 5\,041 - 4\,579 = y(y+1) \therefore$$

$$y(y+1) = 462 = 21 \times 22 \therefore x = 71,\ y = 21,$$

som insatta i (9, 9) giva

$$(714)^2 - (215)^2 = 929 \times 499 = 463\,571.$$

Ex. 6. Till A_1 hör 380 771, som icke kan direkt upplösas efter (1, 1) eller (9, 9). Man multiplicerar talet med 21 och får såsom produkt 7 996 191, som sättes $= 20m + 11$, varav $m = 399\,809$, och försöker med (1, 1).

$$x^2 - \frac{399\,809 - 6x}{5} = y(y+1);\ x \text{ måste sluta på } 9.$$

$$\frac{399\,809 - 54}{5} = 79\,951;\ x > \sqrt{79\,951} > 282 \therefore$$

$$x = 289 \text{ (el. } 299 \text{ etc.)} \therefore (289)^2 - \frac{399\,809 - 6 \cdot 289}{5}$$

eller $$83\,521 - 79\,615 = 3\,906 = 62 \cdot 63 \therefore$$

$$x = 289,\ y = 62 \therefore$$

$$(2\,896)^2 - (625)^2 = 3\,521 \times 2\,271 = 503 \cdot 7 \times 757 \cdot 3 \therefore$$

$$380\,771 = 757 \cdot 503.$$

Ex. 7. 298 471 kan ej heller uppdelas direkt efter (1, 1) el. (9, 9), vadan man multiplicerar med 21 och åter igen försöker. Man får

$$21 \times 298\,471 = 6\,267\,891 = 20m + 11 \therefore m = 313\,394.$$

(1, 1) ger ej resultat, vadan vi använda (9, 9) och få

$$x^2 - \frac{313\,395 - 4x}{5} = y(y+1) \therefore x \text{ måste sluta på } 5,$$

som ger $x^2 - \frac{313\,375}{5} \leqq 0 \therefore x > \sqrt{62\,675} > 250 \therefore x = 255$

(el. 265 etc.). Göres $x = 255$, fås

$$65\,025 - 62\,475 = 2\,550 = 50 \cdot 51 \therefore x = 255,\ y = 50 \therefore$$

$$(2\,554)^2 - (505)^2 = 3\,059 \cdot 2\,049 = 7 \cdot 437 \times 3 \cdot 683 \therefore$$

$$298\,471 = 683 \cdot 437.$$

*

Vi hava nu haft exempel på alla till klass A_1 hörande grupper och övergå till klass B_1.

Genom ett liknande förfarande som vid A_1 och med iakttagande av, att ett till B_1 hörande tal utgör skillnaden mellan en udda och en jämn kvadrat, får man reda på, att tal av denna klass kunna skrivas under formen $20m+1$ samt att de indelas i följande grupper:

$$(10x+1)^2-(10y)^2 \quad =20m+1;\ (1,\ 1).$$
$$(10x+9)^2-(10y)^2 \quad =20m+1;\ (9,\ 9).$$
$$(10x+5)^2-(10y+2)^2=20m+1;\ (7,\ 3).$$
$$(10x+5)^2-(10y+8)^2=20m+1;\ (3,\ 7).$$

Även här kunna vi förbigå de två sista grupperna, då hit hörande tal liksom vid A_1 genom multiplikation med 21 överföras till någon av de två första.

Ekv. (1, 1) transformeras lätt till

$$x^2-\frac{m-x}{5}=y^2; \quad \ldots\ldots\ 1).$$

och (9, 9) till $$x^2-\frac{m-4-9x}{5}=y^2; \quad \ldots\ldots\ 2).$$

Ex. 8. $9\,301=20m+1 \therefore m=465$. Försöka vi med (1, 1), fås

$$x^2-\frac{465-x}{5}=y^2;$$ x måste sluta på 0 el. 5.

$x=0$ gör andra termen $= 93$ och vänstra membrum

$$x^2-93>0;\ x>\sqrt{93}>9 \therefore x=10,$$

som insatt i 1) ger

$$(10)^2-91=y^2 \therefore y=3.$$

Insättes $x=10$ och $y=3$ i (1, 1), fås

$$9\,301=(101)^2-(30)^2=131\cdot 71.$$

Tillämpas förfarandet på 118 301 får man

$$118\,301=421\cdot 281.$$

Ex. 9. $39\,961=20m+1 \therefore m=1\,998$.

Här fås ej resultat med (1, 1), men (9, 9) ger

$$x^2-\frac{1\,994-9x}{5}=y^2 \therefore x$$ slutar på 1 eller 6.

Insättes 1 i st. f. x i andra termen, blir den 397 $\therefore$

$x>\sqrt{397}>19, \ldots \therefore x=21$ el. 26 (el. 31, 36 etc.).

$x=21$ ger ej resultat, men $x=26$ ger

$$676-352=324=y^2 \therefore y=18.$$

Insättes $x=26$ och $y=18$ i (9, 9), fås

$$39\,961=(269)^2-(180)^2=449\cdot 89.$$

Ex. 10. 89 161 kan ej direkt upplösas efter (1, 1) el. (9, 9). Multipliceras med 21, fås 1 872 381.

$$1\,872\,381=20m+1 \quad \therefore \quad m=93\,619.$$

Användes (1, 1), får man

$$x^2-\frac{93\,619-x}{5}=y^2;\ x \text{ slutar på 4 el. 9.}$$

$$\frac{93\,619-4}{5}=18\,723;\ x>\sqrt{18\,723}>136 \quad \therefore \quad x=139 \text{ el. } 144 \text{ (etc.)}$$

$x=139$ ger

$$19\,321-18\,696=625 \quad \therefore \quad y=25.$$

$$(1\,391)^2-(250)^2=1\,641\cdot 1\,141 \quad \therefore$$

$$21\cdot 89\,161=3\cdot 547\times 7\cdot 163 \quad \therefore \quad 89\,161=547\cdot 163.$$

Ex. 11. 2 701 kan ej heller direkt upplösas med tillhjälp av (1, 1) eller (9, 9). Multipliceras med 21, fås

$$21\cdot 2\,701=56\,721=2m+1 \quad \therefore \quad m=2\,836.$$

Efter (1, 1) fås ej resultat, men användes (9, 9) får man efter insättning i 2)

$$x^2-\frac{2\,832-9x}{5}=y^2;\ x \text{ måste sluta på 3 el. 8.}$$

Sättes $x=3$ i andra termen, blir den 561 och v. membrum

$$x^2-561 \quad \therefore \quad x\leqq\sqrt{561}\leqq 23, \ldots$$

Sättes $x=23$, fås

$$529-525=y^2 \quad \therefore \quad y=2.$$

$x=23$ och $y=2$ giva, insatta i (9, 9),

$$(239)^2-(20)^2=259\cdot 219=7\cdot 37\times 3\cdot 73=21\cdot 2\,701 \quad \therefore$$

$$2\,701=73\cdot 37.$$

*

De återstående klasserna 3, 7 och 9 innehålla, såsom man a priori kan inse, följande grupper:

Klass 3	Klass 7	Klass 9
(3, 1)	(7, 1)	(7, 7)
(1, 3)	(1, 7)	(3, 3)
(7, 9)	(3, 9)	(9, 1)
(9, 7)	(9, 3)	(1, 9)

Då de till klasserna 3 och 7 hörande grupperna ej giva så lätthanterliga ekvationer som de föregående, överföras tal från dessa grupper till de redan behandlade (1, 1) och (9, 9) eller till de kommande (7, 7) och (3, 3) på följande sätt:

Genom multiplikation med 3 föres (3, 1) till (3, 3)
» » » 3 » (7, 9) » (7, 7)
» » » 7 » (1, 3) » (1, 1)
» » » 7 » (9, 7) » (9, 9)
» » » 7 » (7, 1) » (7, 7)
» » » 7 » (3, 9) » (3, 3)
» » » 3 » (1, 7) » (1, 1)
» » » 3 » (9, 3) » (9, 9)

Grupperna (9, 1) och (1, 9) överföras genom multiplikation med 21 till (7, 7) och (3, 3) resp. eller genom multiplikation med 9 till (9, 9) och (1, 1).

Anm. Man skulle genom multiplikation med 9 kunna överföra tal från klass 9 till klass 1 och således ej behöva några nya ekvationer; men dels för fullständighetens skull, dels av praktiska skäl behandla vi klass 9 särskilt.

Till klass A_9 höra följande tal:

$$19 = 10 \cdot 1 + 9$$
$$39 = 10 \cdot 3 + 9$$
$$59 = 10 \cdot 5 + 9 \text{ o. s. v.}$$

eller tal av formen $10(2m+1)+9 = 20m+19$. Genom ett liknande resonemang som vid A_1 får man följande likheter:

$$(10x+2)^2 - (10y+5)^2 = 20m+19; \quad \ldots \quad (7, 7).$$
$$(10x+8)^2 - (10y+5)^2 = 20m+19; \quad \ldots \quad (3, 3).$$

Ekv. (7, 7) transformeras till

$$x^2 - \frac{m+2-2x}{5} = y(y+1) \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

och (3, 3) transformeras till

$$x^2 - \frac{m-1-8x}{5} = y(y+1) \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Såsom exempel välja vi ett tal, som behandlats i tredje årgångens andra häfte av denna tidskrift (och rent av givit anledning till denna uppsats).

Ex. 12. $6\,789\,899 = 20m + 19 \therefore m = 339\,494.$

Vi försöka med (7, 7) och insätta således värdet på m i 1) och få

$$x^2 - \frac{339\,496 - 2x}{5} = y(y+1);\ x \text{ slutar på } 8 \text{ (se vid } A_1).$$

Sättes 8 i st. f. x i andra termen, blir den $= 67\,896$ och vänstra membrum blir

$$x^2 - 67\,896 \therefore x > \sqrt{67\,896} > 260,$$

således $x = 268$ (el. 278, 288, etc.). Insättes 268 i st. f. x, fås

$$(268)^2 - \frac{339\,496 - 2 \cdot 268}{5} = y(y+1) \text{ eller}$$

$$71\,824 - 67\,792 = y(y+1) \therefore$$

$$y(y+1) = 4\,032 = 63 \cdot 64 \therefore y = 63.$$

Insättas värdena på x och y i (7, 7) fås

$$(2\,682)^2 - (635)^2 = 3\,317 \cdot 2\,047 = 6\,789\,899.$$

Genom multiplikation med 3 överföras de erhållna faktorerna (sats 3) till klasserna A_1 och B_1.

Behandlas $3 \cdot 3\,317 = 9\,951$ enl. A_1 (1, 1) fås

$$3 \cdot 3\,317 = 321 \times 31 = 3 \cdot 107 \cdot 31.$$

Behandlas $3 \cdot 2\,047 = 6\,141$ enl. B_1 (9, 9), fås

$$3 \cdot 2\,047 = 89 \times 69 = 89 \cdot 23 \cdot 3.$$

$$\therefore\ 6\,789\,899 = 107 \cdot 31 \cdot 89 \cdot 23.$$

Ex. 13. $4\,399 = 20m + 19 \therefore m = 219.$

Med (7, 7) nås ej resultat; men användes (3, 3) fås $x^2 - \frac{218-8x}{5} = y(y+1)$; x slutar på 6, som gör andra termen — 34. Lätt inses, att $x=6$, som insatt i 2) ger

$$36 - 34 = 2 = y(y+1) \therefore y = 1 \therefore$$
$$4\,399 = (68)^2 - (15)^2 = 83 \cdot 53.$$

Ex. 14. 74 339 hör till A_9, men kan ej uppdelas varken med tillhjälp av (7, 7) eller (3, 3). Multipliceras talet med 9, kommer produkten (sats 3) att tillhöra A_1.

$$9 \cdot 74\,339 = 669\,051 = 20m + 11 \therefore m = 33\,452.$$

Försökes med (1, 1), fås

$$x^2 - \frac{33\,452 - 6x}{5} = y(y+1);$$ x måste sluta på 2,

som gör andra termen till 6 688 och v. membrum till

$$x^2 - 6\,688 \therefore x > \sqrt{6\,688} > 81, \ldots \therefore x = 82 \text{ (el. 92 etc.)}.$$

Insättes 82 i st. f. x i v. membrum, fås

$$6\,724 - 6\,592 = 132 = 11 \cdot 12 \therefore x = 82,\ y = 11 \therefore$$
$$(826)^2 - (115)^2 = 941 \cdot 711 = 941 \cdot 79 \cdot 9 \therefore$$
$$74\,339 = 941 \cdot 79.$$

*

Vi övergå nu till klass B_9.

Man finner lätt, att hit hörande tal kunna skrivas under formen $20m+9$.

För grupperna (7, 7) och (3, 3) fås likheterna

$$(10x+7)^2 - (10y)^2 = 20m + 9; \quad \ldots \quad (7, 7)$$
$$(10x+3)^2 - (10y)^2 = 20m + 9; \quad \ldots \quad (3, 3)$$

(7, 7) transformeras till $x^2 - \frac{m-2-7x}{5} = y^2$; . . . . 1)

(3, 3) » » $x^2 - \frac{m-3x}{5} = y^2$; . . . . 2).

Ex. 15. $62\,609 = 20m + 9 \therefore m = 3\,130$.

Vi försöka med (7, 7) och få

$$x^2 - \frac{3\,128 - 7x}{5} = y^2;\ x \text{ måste sluta på 4 el. 9.}$$

$x=4$ gör andra termen till 620 och v. membrum blir

$x^2 - 620 \therefore x > \sqrt{620} > 24, \ldots \therefore x = 29$ (el. 34, 39 etc.)

$x=29$ ger

$$841 - 585 = 256 = y^2 \therefore y = 16.$$

Genom insättning av $x=29$ och $y=16$ i (7, 7) fås

$$(297)^2 - (160)^2 = 457 \cdot 137 = 62\,609.$$

Ex. 16. $84\,769 = 20m + 9 \therefore m = 4\,238.$

Här fås ej resultat med (7, 7), vadan vi försöka med (3, 3).

$$x^2 - \frac{4\,238 - 3x}{5} = y^2;\ x \text{ slutar på 1 el. 6.}$$

$x=1$ gör andra termen $= 847 \therefore x > \sqrt{847} = 29, \ldots \therefore$ $x=31, 36, 41, 46$ etc.

Först talet 46 satisfierar ekvationen, och man får

$$2\,116 - 820 = 1\,296 = (36)^2 \therefore x = 46,\ y = 36$$

som giva $(463)^2 - (360)^2 = 823 \cdot 103 = 84\,769.$

Ex. 17. Talet 261 049 hör till B_9. Det kan ej uppdelas varken med hjälp av (7, 7) eller (3, 3) och hör därför till grupp (9, 1) eller (1, 9). Multipliceras talet med 21, kommer produkten ock att höra till B_9 (sats 3), men till grupp (7, 7) el. (3, 3) enl. föregående. Man får

$$21 \cdot 261\,049 = 5\,482\,029 = 20m + 9 \therefore m = 274\,101.$$

Försöker man nu med (7, 7), fås

$$x^2 - \frac{274\,099 - 7x}{5} = y^2;\ x \text{ slutar på 2 el. 7.}$$

Göres $x=2$, blir andra termen 54 817 $\therefore$

$x > \sqrt{54\,817} > 234, \ldots \therefore x = 237$ el. 242, 247 etc.

Göres $x=237$, får man

$$(237)^2 - \frac{274\,099 - 7 \cdot 237}{5} = y^2 \text{ eller}$$

$$56\,169 - 54\,488 = y^2 \quad \therefore \quad y^2 = 1\,681 \text{ och } y = 41 \quad \therefore$$
$$(2\,377)^2 - (410)^2 = 2\,787 \cdot 1\,967 = 3 \cdot 929 \times 7 \cdot 281 \quad \therefore$$
$$261\,049 = 929 \cdot 281.$$

*

Nu har framställts exempel på uppdelning i faktorer av tal tillhörande så väl avd. *A* som *B* av de behandlade grupperna (1, 1), (3, 3), (7, 7), (9, 9) m. fl. Mycket kunde vara att tillägga om överföringen från övriga grupper till dessa; men det har visats, huru sådan kan tillgå i åtskilliga fall, och må blott tilläggas, att man i st. f. att multiplicera med 3, 7, 9 eller 21 ofta får bättre resultat genom multiplikation med större tal. Metodens användning är ibland lätt nog, men blir ofta besvärlig, enär man väl genast ser, till vilken klass ett tal hör, men icke kan bestämma gruppen, utan får pröva på flera — dock ej mer än fyra.

Vidare har visats, att svårigheter uppstå, om faktorernas relativa storlek är betydlig. En sådan svårighet råkar man ut för, om talet utgör en produkt av tre jämnstora primtal. Så är förhållandet med talet 716 539. Multiplicerar man emellertid talet med 81, får man 58 039 659, som hör till samma klass (A_9) och behandlat efter (7, 7) lätt finnes vara $= (7\,622)^2 - (235)^2 = 7\,857 \cdot 7\,387 = 81 \cdot 97 \cdot 89 \cdot 83$.

Vid metodens användande bör man hava till hands en tabell över de hela talens kvadrater samt en lätt uppgjord tabell över värdena av $y(y+1)$.

Min åsikt är, att man enligt den framställda metoden, som bör kunna förbättras, kan uppdela de flesta sammansatta tal av rimlig storlek i primfaktorer.

Om trianglar med rationella sidor och bissektriser.

Av X.

Låt oss söka en triangel med vinklarna α, β, γ, motstående sidorna a, b, c och bissektriserna v_α, v_β, v_γ, där de sex sista storheterna är rationella tal. Jag bevisar då först, att även *triangelns yta är rationell.*

Man har ju

$$v_\gamma^2 = \frac{ab}{(a+b)^2}(a+b+c)(a+b-c) = \frac{4ab}{(a+b)^2}p(p-c),$$

där $$p = \frac{a+b+c}{2}, \text{ o. s. v.}$$

Därav $$(v_\alpha \cdot v_\beta \cdot v_\gamma)^2 = \left\{\frac{8abcp}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right\}^2 \cdot T^2$$

och $$T = v_\alpha v_\beta v_\gamma \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8abcp},$$

ett rationellt tal.

Om vidare a, b, c, v_α, v_β, v_γ är en lösning, har man samtidigt oändligt många lösningar nämligen $a' = ka$, $b' = kb, \ldots, v_\gamma' = kv_\gamma$, där k är ett positivt rationaltal v. s. h. Tillhörande trianglar äro alla likformiga och man kan välja vilken som helst av dem till representant för hela serien. Man kan också karaktärisera en sådan serie lösningar medels vinklarna α, β, γ. Om dessa vet man följande:

1. $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ *äro rationella*, emedan $\sin\alpha = \frac{2T}{ab}$ o. s. v.,

2. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$ » » , » $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{\sin\beta}{v_\alpha}$ o. s. v.

3. $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

Dessa egenskaper äro emellertid ej oberoende av varandra. *Om α och β äro spetsiga*[1] *positiva vinklar, för vilka* $\sin\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\beta$, $\sin\frac{\beta}{2}$ *äro rationella, är* α, β, $\gamma=\pi-\alpha-\beta$ *en lösning.* Dessa villkor äro nämligen icke blott nödvändiga (såsom omedelbart framgår ur det föregående) utan även tillräckliga. Ty äro de uppfyllda, måste ju även

$$\cos\frac{\alpha}{2}\left(=\frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right),\ \cos\frac{\beta}{2},\ \cos\alpha\left(=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right),\ \cos\beta,$$

$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ och $\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$ vara rationella, och man kan sätta $a=k\sin\alpha$, $b=k\sin\beta$, $c=k\sin\gamma$, k pos. rat. tal. Då äro således a, b, c rationella. Men detta gäller ock för v_α, v_β, v_γ enligt ovanstående formel (2), så snart våra villkor äro uppfyllda. Det är tydligt att man även kan formulera *villkoren* så: *Om α, β äro två spetsiga positiva vinklar, för vilka* $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$ *äro rationella, har man en lösning i α, β, $\gamma=\pi-\alpha-\beta$,* och alla lösningar erhållas på detta sätt.

Det är lätt att finna alla sådana vinklar. Om nämligen $\sin v$ och $\cos v$ äro rationella, är även $\cot\frac{v}{2}=\frac{1+\cos v}{\sin v}$ rationell; men även omvänt, emedan

$$\sin v=\frac{2\cot\frac{v}{2}}{\cot^2\frac{v}{2}+1},\quad \cos v=\frac{\cot^2\frac{v}{2}-1}{\cot^2\frac{v}{2}+1}.$$

Jag sätter därför

$$\cot\frac{\alpha}{4}=\varrho,\ \text{ett positivt rationellt tal} > 1+\sqrt{2}=\cot\frac{\pi}{8}$$

och $\cot\frac{\beta}{4}=\sigma$, » » » » » » ,

[1] $\alpha(\beta)$ kan ej vara $\frac{\pi}{2}$, medan $\sin\frac{\alpha}{2}$ då vore irrationell.

och får

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2\varrho}{\varrho^2+1}\quad,\qquad \sin\frac{\beta}{2}=\frac{2\sigma}{\sigma^2+1},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho^2-1}{\varrho^2+1}\quad,\qquad \cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sigma^2-1}{\sigma^2+1},$$

samt $\sin\alpha=\dfrac{4\varrho(\varrho^2-1)}{(\varrho^2+1)^2}$ och $\sin\beta=\dfrac{4\sigma(\sigma^2-1)}{(\sigma^2+1)^2}$.

Om jag vidare sätter

$$\tau=\cot\frac{\gamma}{4}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}-\frac{\beta}{4}\right)=\frac{\varrho\sigma+\varrho+\sigma-1}{\varrho\sigma-\varrho-\sigma-1},$$

gäller mellan de tre rationella talen ϱ, σ, τ relationen

(A) $$\varrho\sigma\tau-(\varrho\sigma+\sigma\tau+\tau\varrho)-(\varrho+\sigma+\tau)+1=0.$$

Vårt resultat blir alltså:

Sidorna i de sökta trianglarna äro proportionella med talen

$$\frac{\varrho(\varrho^2-1)}{(\varrho^2+1)^2},\quad \frac{\sigma(\sigma^2-1)}{(\sigma^2+1)^2},\quad \frac{\tau(\tau^2-1)}{(\tau^2+1)^2},$$

där ϱ, σ, τ *äro tre rationella tal* >1, *som uppfylla villkoret* (A). *Man kan alltid*, i överensstämmelse med det faktum att varje triangel har två spetsiga vinklar, *välja två av dessa sista tal* $>1+\sqrt{2}$, *det tredje blir då* >1.

Med en pytagoreisk triangel förstår man en rätvinklig triangel, i vilken alla sidornas längder mätas av hela tal utan gemensam faktor $\neq 1$. Om α är en av de spetsiga vinklarna i en sådan triangel, måste $\sin\alpha$ och $\cos\alpha$ bägge vara rationella. Omvänt är tydligen varje rätvinklig triangel, som innehåller en spetsig vinkel α med rationella $\sin\alpha$ och $\cos\alpha$, likformig med en pytagoreisk triangel, emedan dess sidor äro proportionella med k, $k\sin\alpha$, $k\cos\beta$ och det hela talet k alltid kan väljas så, att dessa tre tal äro hela tal utan gemensam divisor $\neq 1$.[1] För att erhålla allmänna uttrycket för sidorna i en pyt. triangel observerar jag som ovan, att $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ alltid äro rationella

[1] Nödvändigt och tillräckligt härför är att två v. s. h. av sidolängderna äro relativa primtal, som lätt följer ur Pytagoras' sats.

samtidigt med $\cot\frac{\alpha}{2}$. Om jag alltså väljer två hela tal u, v *utan gemensam faktor* $\neq 1$ *samt* $u > v$, kan jag sätta $\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{v}$ och fastställa $o < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$. Jag erhåller

$$\sin\alpha = \frac{2uv}{u^2+v^2}, \quad \cos\alpha = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2},$$

varvid $o < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Sidorna i den rätvinkliga triangel, vars ena spetsiga vinkel är α, äro alltså prop. med k, $\frac{2uv\,k}{u^2+v^2}$, $\frac{(u^2-v^2)k}{u^2+v^2}$. För att få den pyt. triangeln har man endast att välja k så, att dessa tre tal bli hela tal utan annan gemensam faktor än 1.

Vi få tvänne fall:

1:o. u och v av olika paritet. $k = u^2+v^2$.

Hypotenusan u^2+v^2, kateterna u^2-v^2 och $2uv$.

2:o. u och v bägge udda. $k = \frac{u^2+v^2}{2}$.

Hypotenusan $\frac{u^2+v^2}{2}$, kateterna $\frac{u^2-v^2}{2}$ och uv.

I första fallet äro u^2+v^2 och u^2-v^2 udda. En gemensam faktor till dessa bägge måste även gå upp i deras summa $2u^2$ och deras skillnad $2v^2$. Då u och v äro relativt prima, skulle den gem. faktorn, om den är $\neq 1$, alltså vara 2, vilket är omöjligt. Alltså äro u^2+v^2, u^2-v^2, $2uv$ sidor i en pytagoreisk triangel, så snart $u > v$ och de bägge rel. prima talen u, v ej bägge äro udda. *I andra fallet* äro u^2+v^2, u^2-v^2 jämna tal. Som förut inses att $\frac{u^2+v^2}{2}$, $\frac{u^2-v^2}{2}$, uv ej hava någon gemensam faktor $\neq 1$, om u, v sakna sådan. De äro alltså sidor i en pyt. triangel, om u, v äro två rel. prima udda hela tal, $u > v$. Varje pyt.

triangel kan framställas på tvänne sätt. Jag kan nämligen även utgå från den andra spetsiga vinkeln β och sätta

$$\frac{u_1}{v_1} = \cot\frac{\beta}{2} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{u+v}{u-v}.$$

Enda möjliga tal, varmed sista bråket kan förkortas, är 2 (en gem. faktor till $u+v$ och $u-v$ måste även ingå i $2u$ och $2v$).

I första fallet måste man alltså sätta $u_1 = u+v$, $v_1 = u-v$ d. v. s. den pyt. triangeln framkommer under formen

2:o. $\frac{u_1^2+v_1^2}{2}$, $\frac{u_1^2-v_1^2}{2}$, $u_1 v_1$.

I andra fallet kan $\frac{u+v}{u-v}$ förkortas med 2 och man får $u_1 = \frac{u+v}{2}$, $v_1 = \frac{u-v}{2}$, av vilka det ena talet måste vara udda och det andra jämnt, enär summan är udda. Den pyt. triangeln framkommer under formen

1:o. $n_1^2+v_1^2$, $u_1^2-v_1^2$, $2u_1v_1$.

Av detta följer, att man erhåller alla pytagoreiska trianglar genom ettdera av framställningssätten, var och en endast en gång.[1]

Av framställningen 1:o framgår omedelbart, *att i varje pyt. triangel hypotenusan och ena kateten mätas av udda tal, den andra av ett jämnt.* För två udda tal v. s. h. $u = k \cdot u$, $v = k \cdot v$, u, v rel. prima, följer samtidigt ur 2:o, att $\frac{u^2+v^2}{2} = k^2 \cdot \frac{u^2+v^2}{2}$ är udda, men $\frac{u^2-v^2}{2} = k^2\frac{u^2-v^2}{2}$ jämnt, vilket naturligtvis kan inses direkt ($u = 2m+1$, $v = 2n+1$).

I likhet med varje triangel med rationella sidor och rationell yta kunna de trianglar vi här undersöka uppdelas i deltrianglar likformiga med pytagoreiska trianglar.[1] I vårt fall kunna dessa sistnämnda trianglar emellertid ej väljas hur som helst. Om vi för att betrakta ett konkret fall

[1] Jfr en uppsats av A. Lindhagen, denna tidskr. 3 årg. häft. 1.

(fig. 1) draga höjden mot den största sidan, låt vara AB, i en av våra trianglar, uppdelas denna i de bägge deltrianglarna CHA och CHB, där H är höjdens fotpunkt på AB, så att A och B ligga på var sin sida om H. *Dessa deltrianglar äro likformiga med pytagoreiska trianglar, i vilka hypotenusornas längder äro (udda) kvadrattal, medan de med AH och BH homologa kateternas längder mätas av udda tal.* Omvänt kan man medels pyt. trianglar med hypotenuslängder, som äro kvadrattal, på nyssnämnda sätt sammansätta representanter för alla serier likformiga trianglar med rat. sidor och bissektriser.

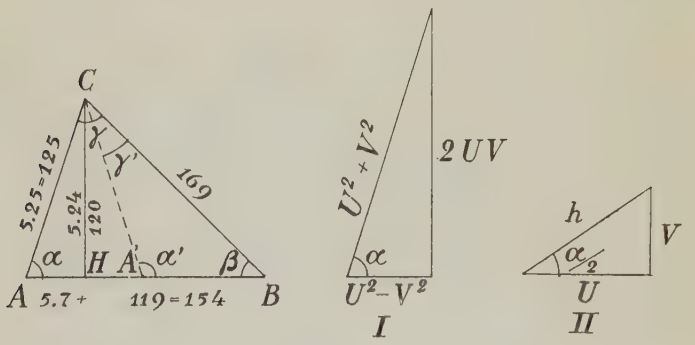


Fig. 1.

För att bevisa detta betraktar jag den ena deltriangeln ACH och har två pytagoreiska trianglar I och II:

I med en spetsig vinkel α och II med en spetsig vinkel $\frac{\alpha}{2}$ (pytagoreisk emedan $\sin\frac{\alpha}{2}$ och $\cos\frac{\alpha}{2}$ äro rationella).

För att uttrycka sidolängderna i II sätter jag

$$\cot\frac{\alpha}{4}=\frac{u}{v},$$

där u och v äro relativa primtal samt $u>v(1+\sqrt{2})$, emedan $\frac{\alpha}{4}<\frac{\pi}{8}$, då $\alpha<\frac{\pi}{2}$. Jag har då hypotenusa och kateter under formerna

$h=u^2+v^2$, $U=u^2-v^2$, $V=2uv$, om u och v ha olika paritet och

$h=\frac{u^2+v^2}{2}$, $U=\frac{u^2-v^2}{2}$, $V=uv$, » u » v » samma » .

I bägge fallen är $U>V$, då $\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$. Dessutom äro U och V rel. prima och av olika paritet (såsom alltid kateterna i en pyt. triangel). Sidolängderna i I erhåller jag slutligen ur

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{U}{V}.$$

Hypotenusan är alltså U^2+V^2 och den mot AH svarande kateten U^2-V^2. Det är genast klart, att det sista talet är udda, då U och V ha olika paritet. Vidare är $U^2+V^2=h^2$, alltså jämn kvadrat.

Antag omvänt att man har en pytagoreisk triangel med vinkeln α, i vilken hypotenusan är jämn kvadrat, medan den katet, som jämte hyp. omfattar vinkeln α, är udda. Jag påstår, att $\sin\frac{\alpha}{2}$ och $\cos\frac{\alpha}{2}$ äro rationella. Emedan $\cot\frac{\alpha}{2}$ är rationell i varje pyt. triangel, räcker det, om $\cos\frac{\alpha}{2}$ bevisas vara rationell. Tänker jag mig därför triangeln framställd på första sättet (sid. 4), kan jag sätta

$$\cos\alpha=\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2},$$

där u och v ha olika paritet.

Därav
$$1-2\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{u^2-v^2}{u^2+v^2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{v^2}{u^2+v^2},$$

varav följer, att $\cos\frac{\alpha}{2}$ är rationell, så snart u^2+v^2 d. v. s. hypotenusan är jämn kvadrat.

Vinkeln α kan således ingå i en triangel med rationella sidor och bissektriser och man behöver i en sådan endast draga en höjd från endera av de andra vinkelspetsarna (β, γ) för att erhålla en med ifrågavarande pyt. triangel likformig deltriangel. Den katet i denna deltriangel, som motsvarar den pyt. triangelns udda katet, tillhör alltid en sida i triangeln med rat. sidor och biss.

Ex. För $u=3$, $v=1$ får II sidorna $U=4$, $V=3$, $h=5$ och I sidorna $U^2-V^2=7$, $2UV=24$, $U^2+V^2=h^2=25$.

För $u=5$, $v=1$ på samma sätt II′: 12, 5, 13 och I′: 119, 120, 169. Förstoras I 5 gånger, erhålles genom sammanfogning med I′ en triangel med rat. sidor och biss. som fig. 1 anger. Om man vrider $\triangle CAH$ ett halvt varv omkring CH till läget $CA'H$, erhålles en ny $\triangle A'BC$ med rat. sidor (169, 125, 84) och biss. I denna är $\angle BA'C=\alpha'$ störst och $\alpha'=\pi-\alpha$, men $\sin\frac{\pi-\alpha}{2}$, $\cos\frac{\pi-\alpha}{2}$ äro ju rationella, om $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ äro det. Följaktligen även $\sin\frac{\gamma'}{2}$, $\cos\frac{\gamma'}{2}$, då $\gamma'=\pi-\alpha'-\beta'$.

Det kan slutligen anmärkas, att i varje triangel med rationella sidor och inre bissektriser, även de stycken av yttre biss., som ligga mellan vinkelspets och motstående sida, ha rationella längder. Detta gäller ock för radierna i de in- och vidskrivna cirklarna liksom även för den omskrivna cirkelns radie. Allt detta framgår omedelbart ur uttrycken för ifrågavarande sträckor.

En konstruktion av rötterna till den allmänna ekvationen av andra graden.

Av X.

Om jag först antager den givna ekvationen av formen

$$z^2 - 2az + b^2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

erhålles den sökta konstruktionen enkelt med stöd av den som uppgift 55 i årg. III (sid. 245) av denna tidskrift bevisade satsen: I en cirkel med medelpunkten O och radien r äro två punkter P och P_1 tagna på samma diameter och på samma sida om O, samt så, att $OP \cdot OP_1 = r^2$. Om genom P drages en godtycklig korda APB, så är PP_1 en av bissektriserna till $\angle\, AP_1B$.

Ett komplext tal $z = x + iy$, där x och y äro reella tal, representeras enligt *Gauss* av den punkt Z, som har de rätvinkliga koordinaterna (x, y) i ett koordinatplan (det Gauss'ska talplanet). Skriver man $z = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \varrho e^{i\varphi}$,[1] då $\varrho\cos\varphi = x$, $\varrho\sin\varphi = y$, betyder $\varrho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ (det komplexa talets modul, absoluta belopp) längden OZ, medan $\varphi = \arg z$ (det komplexa talets argument) betyder $\angle\, XOZ$ räknad i positiv led från OX (se fig. 1).

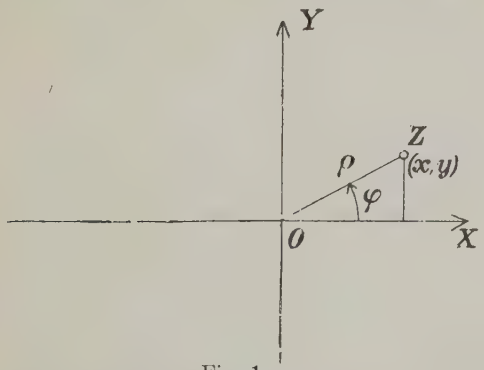


Fig. 1.

[1] Se t. ex. Collins trigonometri sid. 110!

Vi kunna nu precisera vår uppgift så: *De mot koefficienterna a och b i ekv. (1) svarande punkterna A och B resp. äro givna. Att konstruera de mot ekvationens rötter* z_1, z_2 *svarande punkterna* Z_1, Z_2. (Fig. 2).

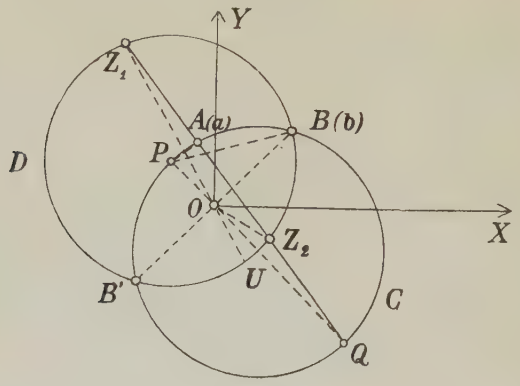


Fig. 2.

Lösning:

1. Konstruera B', som motsvarar $-b$. B och B' ligga symmetriskt med avseende på O.

2. Konstruera den kring ABB' omskrivna cirkeln (C). Jag förutsätter här, att de tre punkterna ej ligga i rät linje, för att sedan återkomma till detta undantagsfall.

3. P, mittpunkten på den båge BB' på C, som innehåller A, tages till centrum för en cirkel (D) genom B (och B'). Sammanfalla A och B, kan man välja vilkendera bågen som helst på C.[1]

4, Q och P diametralt motsatta punkter på C. AQ skär D i de sökta punkterna Z_1 och Z_2.

Bevis: Om z_1 och z_2 äro de tal, som representeras av Z_1 och Z_2 resp. och

$$z_1 = x_1 + iy_1 = \varrho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$
$$z_2 = x_2 + iy_2 = \varrho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

skall bevisas, att $\frac{z_1+z_2}{2} = a$ och $z_1 z_2 = b^2$.

[1] Cirkeln C bestämmes då av B, B' och tangentriktningen i B, som är godtycklig. Jfr nästa sida.

Först är klart, att AQ alltid råkar cirkeln D, emedan punkten A ligger inom eller på denna cirkel enl. 3.

Då $PA \perp AQ$ och P är centrum i cirkeln D, ligger A mitt emellan Z_1 och Z_2 och har alltså koordinaterna $\frac{x_1+x_2}{2}$, $\frac{y_1+y_2}{2}$, varav $\frac{z_1+z_2}{2}=a$, vilket var det första, som skulle bevisas.

$POQ \perp BB'$ är en diameter i C enl. 3 och 4. O och Q ligga på samma sida om P och $PO \cdot PQ = PB^2$. O och Q (utanför D) ha således det läge i förhållande till cirkeln D, som satsen i ex. 55 förutsätter. Alltså bilda OZ_1 och OZ_2 lika vinklar med PQ och sål. med den däremot vinkelräta BB', varav

$$\frac{\varphi_1+\varphi_1}{2}=\arg.\, b \quad \text{eller} \quad \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\arg.\,(-b)=\arg.\, b+\pi$$

eller i varje fall $\varphi_1+\varphi_2=\arg.\, b^2$ [1] på heltalsmultipel av 2π när. Om Z_1O utdragen skär D i U är av symmetriskäl $OU=OZ_2$ och $OZ_1 \cdot OZ_2 = OB \cdot OB' = OB^2$ d. v. s.

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = |b|^2 \text{ eller } |z_1 z_2| = |b^2| = |b|^2, \text{ då ju}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \varrho_1 \varrho_1 [\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i \sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

d. v. s. $|z_1 z_2| = \varrho_1 \varrho_2$ och $\arg.\, z_1 z_2 = \varphi_1+\varphi_2$.

Då alltså $|z_1 z_2| = |b^2|$ och $\arg.\, z_1 z_2 = \arg.\, b^2 + 2k\pi$, är, som det skulle vara, $z_1 z_2 = b^2$.

Ligga de tre punkterna A, B, B' i rät linje, degenererar cirkeln C i en rät linje eller också är den obestämd, om två av de tre punkterna sammanfalla. Det sistnämnda fallet löses som det allmänna. Man behöver blott ersätta de sammanfallande punkterna med en punkt och tillhörande (f. ö. godtyckliga) tangentriktning. Motsvarande ekvationer äro $z^2-2az+a^2=0$ och $z^2-2az=0$. Den förra om A och B, den senare om B och B' sammanfalla; och dessa enkla ekvationers geometriska lösning är knappast av intresse. Vi förutsätta alltså A, B, B' distinkta och särskilja de bägge fallen 1:o) A mellan B och B' och 2:o) A utanför sträckan BB'.

[1] Arg. $z^2 = 2$ arg. z enligt Moivres teorem.

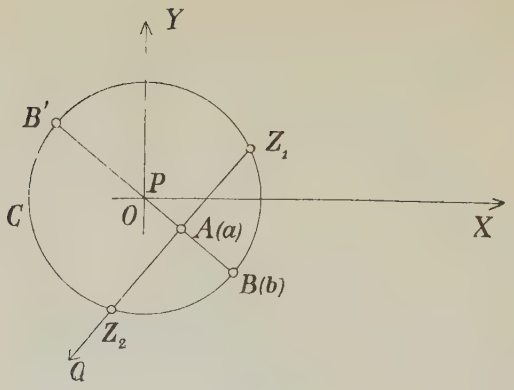


Fig. 3.

1:o. (Fig. 3.) Cirkeln C övergår i linjen BB'. P faller i O, Q oändligt långt bort i den mot BB' vinkelräta riktningen. *Man tager alltså O till centrum för en cirkel genom B och drager normalen genom A mot OB. Z_1 och Z_2 äro skärningspunkterna mellan denna linje och cirkeln.* Beviset är likartat med beviset i det allmänna fallet och torde kunna utelämnas.

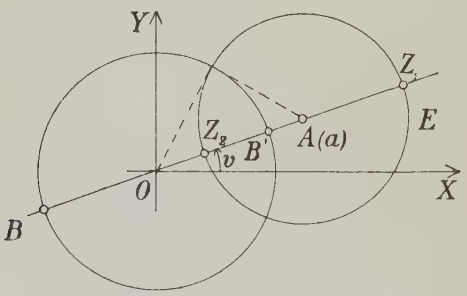


Fig. 4.

2:o. (Fig. 4.) I detta fall kan den allmänna konstruktionen ej användas. Man kan i stället förfara t. ex. sålunda. Upprita en cirkel med centrum i O genom B och tag A till centrum för en cirkel (E), som skär den förstnämnda under räta vinklar. Linjen OA utskär då på E de sökta

punkterna Z_1, Z_2. Det är nämligen omedelbart klart, att $z_1+z_2=2a$ och $z_1z_2=b^2$. De till fallen 1:o och 2:o hörande ekvationerna äro av formen

$$z^2 \pm 2|a|e^{iv}z+|b|^2 \cdot e^{2iv}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

och övergå genom transformationen $z=u \cdot e^{iv}$ i ekv.

$$u^2 \pm 2au+b^2=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

som har reella koefficienter. Denna transformation motsvaras av en vridning vinkeln $-v$ omkring origo i det komplexa planet, varvid OA faller längs reella axeln OX.

Ekv. (3) har således komplexa rötter, om ekv. (2) hör under 1:o (fig. 3), men reella i fallet 2:o, som det bör vara, då diskriminanten är $4(a^2-b^2)$ d. v. s. $\gtrless 0$ allt efter som $|a| \gtrless |b|$.

Har den givna ekvationen icke formen (1) utan den allmännare

$$z^2+\alpha z+\beta=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

svarar A mot $-\frac{\alpha}{2}$, som lätt konstrueras, medan B och B' svara mot $\pm\sqrt{\beta}$, d. v. s. två tal med den gemensamma modulen $\sqrt{|\beta|}$ och argumenten $\frac{1}{2}$ arg. β och $\frac{1}{2}$ arg. $\beta+\pi$. Då $\sqrt{|\beta|}$ är medelproportionalen mellan $|\beta|$ och 1 (längdenheten), kan konstruktionen av B och B' återföras på enkla, kända konstruktioner, varpå jag ej skall ingå.

Några meteorologiens hjälpmedel vid studiet av de högre luftlagren.

Av TAGE KORAEN.

Först sedan Fahrenheit vid övergången mellan 1600- och 1700-talen hade konstruerat med varandra jämförbara termometrar, blev det möjligt att vetenskapligt söka utforska atmosfärens temperaturförhållanden och därmed i samband stående företeelser. Visserligen kände man redan före Fahrenheits tid till åtskilliga meteorologiska lagar, men något verkligt utforskande av atmosfärens hemligheter hade ej kunnat komma i fråga.

Den meteorologiska vetenskapens födelse skulle man för övrigt kunna datera så noga, att till och med själva födelsedagen kan angivas, om man med meteorologi åsyftar den internationellt organiserade väderlekstjänsten. Den 14 november 1854 uppstod på Svarta havet plötsligt en våldsam storm, som for fram ganska vårdslöst med de i närheten av Krim samlade franska och engelska flottorna. Denna storm kunde spåras över vidsträckta delar av Europa och gav fransmannen Leverrier impulsen till organiserandet av ett nät meteorologiska stationer, som genom att ställas i telegrafisk förbindelse med varandra möjliggjorde ett regelbundet utsändande av väderleksförutsägelser framför allt stormvarningar.

Långt före denna tid, redan på 1500- och 1600-talen, de stora geografiska upptäckternas tidevarv, hade man dock

sysslat med meteorologiska företeelser, framför allt de stabila vindförhållandena på världshaven, men nu blevo även de dagliga förändringarna, väderleken, föremål för ivrigt studium på talrika meteorologiska stationer. I vårt land organiserades väderlekstjänsten på 60- och 70-talen, och vår Meteorologiska Centralanstalt trädde i verksamhet 1873.[1]

Det dröjde dock icke länge, förrän man var på det klara med, att det visserligen rikhaltiga observationsmaterial man kunde erhålla från de organiserade stationerna dock icke skulle bliva tillräckligt för att få full kännedom om lagarna för väderleken. Därtill behövdes även direkta observationer från andra och högre luftlager än de intill jordytan närmast belägna, eljest skulle ett utforskande av atmosfärens rörelser, framför allt barometerminima och barometermaxima, deras orsaker och förlopp, ej bliva möjligt. Första steget till erhållande av observationer från de högre luftlagren blev anläggandet av ofta mycket dyrbara observatorier på bergstoppar. Visserligen förstod man väl, att förhållandena där ej skulle giva den klarhet angående förhållandena i fria luften, som man åsyftade, men det gick ju icke för sig tyvärr att utan vidare upprätta en station i fria luften. Dessa bergsstationer hava emellertid lämnat synnerligen viktiga upplysningar angående de atmosfäriska förhållandena.

Innan man med modernare hjälpmedel hade lyckats erhålla tillförlitliga observationer angående förhållandena i atmosfärens högre lager, saknade man emellertid visst icke teorier angående dessa, tvärtom, under tiden 1850—1890 uppställdes den ena teorien efter den andra särskilt angående luftcirkulationen i atmosfären. Till sist kändes det för den meteorologiska vetenskapen som en verklig lättnad att genom direkta observationer kunna påvisa fakta

[1] Numera är Meteorologiska Centralanstalten sammanslagen med Hydrografiska Byrån till Statens Meteorologisk-hydrografiska anstalt. En intressant redogörelse för meteorologiens utvecklingsgång och ståndpunkt vid början av 1900-talet återfinnes i: Hildebrandsson et Teisserenc de Bort: Les bases de la météorologie dynamique.

och därmed göra slut på en lång fast visserligen icke ofruktbar strid mellan olika teoriers anhängare. Att här ingå på en närmare redogörelse för teorierna om luftcirkulationen tillåter icke utrymmet.[1]

För att lösa spörsmålet om luftcirkulationen i icke alltför höga luftlager hade man det yppersta studiematerial att tillgå i molnen och deras rörelser. Men innan den enkla metoden med framgång kunde tillgripas, hade man en mångfald svårigheter att övervinna. Molnens höjd växlar ofantligt och med höjden växlar utseendet betydligt. Det fordrades först ett flerårigt och mödosamt studium av molnen just i dessa båda avseenden, höjd och utseende, innan man kunde hoppas, att vetenskapligt fullgoda molnobservationer skulle erhållas. En av initiativtagarna till det nödvändiga klassificeringsarbetet var en svensk, professor Hildebrandsson i Uppsala. Resultatet av de intressanta företrädesvis fotografiska metoder, som kommo till användning vid arbetet, gav vid handen, att ett moln av visst utseende alltid befann sig på ungefärligen samma höjd över jordytan. Genom att sedan aktge på den riktning, i vilket molnet rör sig, har man således erhållit vindriktningen på den höjden.

Redan på 1870-talet hade regelbundna molnobservationer begynt: i Sverige organiserade av Hildebrandsson. Hans avsikt var i första hand att utröna vindriktningen över lufttrycksmaxima och minima. Hildebrandsson lyckades också snart fastställa, att de högsta molnen (cirri- eller fjädermolnen) röra sig ut från ett minimum men in mot maximum (i båda fallen med den på grund av jordens rotation orsakade avböjningen åt höger på norra halvklotet). Som bekant äro förhållandena motsatta vid jordytan och genom molnobservationerna erhölls nu bekräftelse på teorierna beträffande förhållandena över maxima och minima.

Samtidigt iakttogs emellertid hos cirrimolnen en bestämd tendens till rörelse i viss riktning, olika över olika delar av

[1] En redogörelse härför återfinnes i förut citerade arbete av Hildebrandsson och Teisserenc de Bort: Tome II, sid. 207 och följ.

jordklotet. Detta visade, att man var den allmänna luftcirkulationen på spåren, den luftcirkulation således, som otvivelaktigt skulle finnas och som fortgår relativt ostörd av sådana tillfälliga störningar som maxima och minima. Inför hoppet att lösa detta intressanta problem tog molnstudiet ny fart, och det nämnda vittomfattande klassificeringsarbetet började på allvar.

Meteorologien hade just vid tiden omkring 1890 fått en ganska fast internationell organisation, som nu tog hand om arbetet. Efter åtskilliga förberedelser utgavs 1896 en första molnatlas innehållande utomordentligt väl utförda reproduktioner i färg av fotografier över de viktigaste molntyperna. Man hade under arbetet funnit, att molnen hade ungefär samma utseende över hela jorden och ganska lätt kunde inordnas i ett fåtal klasser eller typer. Atlasen innehöll dessutom noggranna beskrivningar över dessa typer samt diverse instruktioner m. m. för molnobservatörer. Av atlasens 30 planschfigurer äro 9 reproducerade efter fotografier tagna i Uppsala.

Under året 1896 vidtog sedan det i meteorologiens historia så betydelsefulla »molnåret», som det alltjämt kallas. Över hela den civiliserade världen gjordes så gott som varje dag vid ett stort antal stationer ytterst fullständiga och minutiöst noggranna molnobservationer under tiden juni 1896—maj 1897, varvid höjdmätningen blev det viktigaste momentet jämte bestämmandet av rörelseriktningen och hastigheten. Det var en fotografisk metod, utarbetad i Uppsala, som på de flesta platser kom till användning. Ett verkligt jättearbete utfördes; ensamt i Uppsala togos bortåt ett par tusen plåtar, och det mätningsarbete, och räknearbete, som sedan måste nedläggas på varje plåt för att avvinna den dess hemligheter, var ganska tidsödande. Resultaten av detta års arbete hava sedan publicerats av varje station för sig. Professor Hildebrandsson har utgivit ett sammandrag och en bearbetning av dessa publikationer. Ur detta arbete lånas följande uppgifter om cirrus- och nimbusmolnens höjd på några platser:

Medelhöjd:		Manilla m	Washington m	Uppsala m
cirrus:	sommar	11 100	10 300	8 200
	vinter	10 600	9 500	7 000
nimbus:	sommar och vinter	1 400	1 800	1 000

Som allmän regel gäller, att samma molnform har större höjd vid ekvatorn än vid polen och större höjd på sommaren än på vintern.

Nu några ord utan att gå in på detaljer om de resultat man vunnit ur dessa jätteansträngningar. För att nå höjder, som stå utanför inflytandet av maxima och minima samt andra tillfälliga störningar i atmosfären, måste man gå upp till cirrimolnen alltså 7 000 m eller mera. Dessa molns rörelseriktning visar då, att man över tropikerna har en luftström gående nästan rakt från öster till väster med en ganska stor hastighet. Över passadområdet härskar den s. k. antipassaden i atmosfärens högre lager. Denna antipassad blåser stadigt från SW på norra halvklotet och från NW på södra, avböjande alltmera åt höger på norra och åt vänster på södra halvklotet för att över passadområdets gränstrakter vid vändkretsarna blåsa nära nog rakt från väster. Över de tempererade zonerna och polartrakterna kan atmosfärens rörelse liknas vid rörelsen omkring en enda vidsträckt cyklon roterande från väster till öster: de nedre luftlagren sugas in mot polen och de övre strömma därifrån. Vid passadens nordgräns på norra halvklotet flyter således i de högre luftlagren in luft norrifrån från NW och söderifrån från SW och går här sedan rakt från väster, en strömning rakt motsatt den övre luftströmmen över tropikerna. Över dessa gränstrakter uppstår sedan en vertikal nedåtgående luftströmning, som matar dels passaden dels polarvirveln. I trakter med till och med kraftiga monsunvindar visar det sig, att monsunen ej sträcker sig högre än till ett par tusen meter, ovanför gå molnen året runt i samma huvudriktning.

Dessa ytterst intressanta resultat äro således grundade på direkta observationer och kunna med andra ord betraktas som fakta. De före slutet av 90-talet uppställda teorierna grundade sig på observationer vid jordytan, vidare åtskilliga hypoteser och på dem stödda matematiska kalkyler. Alla dessa teorier visade sig emellertid vara oriktiga vad beträffar strömningarna i högre luftlager och hava därför måst övergivas.

För att bekräfta de av molnobservationerna vunna resultaten, var det av vikt att även med andra metoder kunna undersöka atmosfärens högre lager. Molnobservationer äro ej heller tillräckliga att ge klarhet angående samtliga problem rörande atmosfären. Ej ens spörsmålet om vindriktningen kan anses definitivt utrett med enbart molnobservationer. Vid fullständigt klar väderlek saknar man detta observationsmaterial, och de höga molnen äro alltför ofta undanskymda av lägre. Gäller det sedan att undersöka temperaturens fördelning i atmosfären, fuktighetshalten, luftens sammansättning på olika höjder m. m., så måste andra metoder tillgripas, då diverse instrument tydligen skola anbringas å observationsplatsen.

Det sätt att gå till väga, som då låg närmast till hands, var att företaga ballongresor och därunder verkställa de erforderliga observationerna. De vetenskapliga ballongresornas antal är också oerhört stort. Man kan väl säga, att under varje ballongfärd göras observationer, å temperatur, fuktighet, vindriktning och luftens sammansättning m. m., som komma vetenskapen till godo. Bland de allra första, som företogo ballongresor i rent vetenskapligt syfte, var svensken S. A. Andrée. Under åren 1893—95 företog han med olika utgångspunkter ett flertal resor. Vad observationernas talrikhet och noggrannhet beträffar, stå Andrées resor i allra främsta rummet. Man kan icke annat än förvåna sig över, att han, ensam som han alltid var i ballongen, kunde medhinna dessa och därjämte sköta ballongens krävande manövrering. Andrée levde i luftseglingens barndom, han hade icke någon zeppelinare

till sitt förfogande utan en vanlig friballong, som i stort sett måste följa vindriktningen. Sina resultat har Andrée samvetsgrant publicerat efter varje resa och därmed visat, att det icke var lusten efter äventyret utan ett brinnande vetenskapligt intresse, som drev honom till den olyckliga polarfärden 1897.

Observationer med bemannade ballonger företogos under tiden före kriget efter internationell överenskommelse vissa bestämda dagar på ett flertal platser över hela världen i syfte att erhålla en så fullständig bild som möjligt av atmosfärens tillstånd vid en bestämd tidpunkt. Det på detta sätt hopbragta materialet är både rikligt och viktigt. De icke minst flitiga materialsamlarna hava varit tyskarna. Två tyska meteorologer, Berson och Süring, äro ännu säkerligen innehavare av höjdrekordet 10 800 m. På sådan höjd, där lufttrycket uppgår till endast omkring 200 mm, måste helt naturligt särskilda åtgärder vidtagas för att mildra obehaget av luftförtunningen och kylan. De flesta ballongfärder överskrida icke 6 000 m:s höjd. Den största höjd Andrée, som dock icke lade an på höjdflygningar, uppnådde var 4 387 m.

Ett av de intressantaste problemen man sökt fast förgäves lösa med resor i bemannade ballonger är, om och hur luftens sammansättning ändrar sig med höjden. Vid jordytan kan luftens sammansättning i torrt tillstånd sägas vara 78 volymprocent kväve, 21 % syre och 1 % argon, kolsyra m. m. Av teoretiska skäl har man anledning antaga, att på högre höjder sammansättningen är en helt annan: på 20 km:s höjd 84 % kväve, 15 % syre och 1 % argon m. m. Redan på denna höjd börjar vätgas att uppträda i större kvantiteter 0,15 % för att bliva den övervägande på ännu större höjd. På 100 km:s höjd är sammansättningen sålunda: 0,1 % kväve, 99,5 % väte och 0,4 % helium, som på lägre höjder förekommer till ytterst ringa kvantitet. Ovan nämnda siffror angiva atmosfärens sammansättning i avrundade tal; ingen hänsyn har heller tagits till vattenångan, som till kvantiteten före-

kommer i synnerligen varierande mängd, 0—4% vid jordytan. Vid 20 km:s höjd kan lufttrycket uppskattas till 40 mm och på 100 km:s höjd till 0,02 mm. Det är således ytterst ringa gasmängder det blir fråga om på högre höjder. Att nu söka bekräfta dessa teoretiska resultat har varit en av ballongresornas uppgifter. Luftprov hava tagits på olika höjder och underkastats noggrann analys. Sådana luftprov tagas bäst i bemannade ballonger, men man har lyckats att konstruera automatiska luftprovstagare och därmed hämta ned luft från 15,5 km:s höjd. Försöken hava emellertid ej givit några säkra resultat. Detta är ej heller överraskande, då luftlagren upp till 15 km:s höjd genom vindarna samt de uppåt- och nedåtgående luftströmmarna blandas så väl med varandra, att det ej blir möjligt att konstatera ett fenomen, som förutsätter en absolut stillastående atmosfär.

Ballonguppstigningar äro emellertid både dyrbara och framför allt riskabla företag, även om de företagas med nutidens styrbara luftskepp av ett eller annat slag. De lämpa sig därför ej heller för det dagliga utforskande av de högre luftlagren, som är önskvärt så väl ur rent vetenskaplig synpunkt som ock för att erhålla säkrare underlag för väderleksförutsägelser. Dessutom äro de höjder, som kunna uppnås med bemannade ballonger alldeles otillräckliga. I stället har man övergått till användningen av obemannade ballonger, som då uppsändas antingen utan varje instrument för att endast undersöka vindriktningen på olika höjder eller med ett självregistrerande instrument, en s. k. meteorograf. Ballongens belastning blir mycket ringa och stora höjder kunna på så sätt uppnås. Rekordet i detta avseende uppgår till 29 000 m. Ballongen blir helt naturligt mycket billigare: storleken kan nedbringas avsevärt och även materialet kan väljas av enklare beskaffenhet. I stället för siden kan man t. ex. använda tunt papper, som med fernissa gjorts lufttätt. Kautschukballonger äro naturligtvis dock att föredraga, då dessa utvidga sig allt eftersom de stiga till större höjd. Ballongen fylles alltid med vätgas.

Det är icke synnerligen stora ballonger, som erfordras vid dessa försök: i diameter endast 1 à 2 m. Ofta använder man två ballonger, den ena över den andra, den undre endast delvis fylld med vätgas. Då den övre ballongen under stigningen utvidgas alltmera, kommer ballonghöljet till sist att spricka. Den undre kan ej ensam uppbära tyngden av instrumenten, varför det hela kommer att falla till marken, men fallets våldsamhet mildras av den kvarvarande ballongen, som tjänstgör som en sorts fallskärm. Genom att fylla den övre ballongen med en lämplig mängd vätgas, kan man rent av »ställa in» ballongen på att spricka vid en viss höjd och därmed hindra ballongen från att hålla sig svävande en längre tid och föras bort alltför långt från observationsplatsen. Om instrumentet skulle falla ned i en sjö, underlättar ock den undre ballongen, som svävar över vattnet, instrumentets återfinnande. Den tid en ballong av nu angiven beskaffenhet håller sig svävande blir icke synnerligen lång, några få timmar endast. Således är det ännu långt till idealet för ett höjdobservatorium: ett fullständigt observatorium i en förankrad ballong, där observationerna utföras dygnet om, månad efter månad.

De instrument, som tillhöra den ballongen medföljande meteorografen, äro barometer, termometer och hygrometer. Barometern är nödvändig, emedan det är ur dess angivelser höjden skall beräknas. Barometern utgöres av en vanlig aneroid i form av ett Bourdons rör, ett bågformigt, utplattat metallrör. Rörets formförändringar överföras medelst en lämplig hävstångsutväxling till en skrivarm, som ritar på en roterande kopparcylinder. Denna är överdragen med sot, i vilket pennan då ritar en tydlig linje. En sådan cylinder upphittades en gång av en gumma i Danmark, som av pur välmening tog sig för att skura kopparn skinande blank, innan hon återlämnade den till meteorologiska stationen. Lyckligtvis var pennan i detta fall som alltid så skarp, att den skrapat en ritsa i kopparplåten, varför instrumentet med lätthet kunde avläsas trots renlighetsnitet!

På samma roterande kopparcylinder, som hålles i gång av ett urverk, rita även medelst andra skrivarmar termometern och hygrometern. Termometern, som måste vara tillverkad av hållbart material, utgöres av ett stål- och ett mässingband, vilka utefter hela sin längd äro sammanlödda med varandra. På grund av bandens olika utvidgningskoefficienter ändrar sig krökningen med temperaturen, som således kan registreras. Hygrometern utgöres av en hårhygrometer, som om blott hårknippet prepareras på lämpligt sätt kan göras synnerligen tillförlitlig. Samtliga instrument tarva naturligen en empirisk undersökning både före och efter ballongresan.

Hela apparaten insättes i en korklåda och denna i sin tur i en lätt videkorg upphängd c:a 2 m under ballongen. Tack vare korklådan kan apparaten hålla sig flytande, om den skulle hamna i någon sjö, och videkorgen gör det hela mindre ömtåligt för stötar. Genom att i så stor utsträckning som möjligt använda sig av aluminium har hela meteorografen kunnat göras mycket lätt; vikten uppgår icke till mer än ungefär 1 kg. De flesta instrumenten bliva oanvändbara, om de efter en luftresa fått ligga ute en tid, innan de upphittats, vilket ofta blir fallet. Även dessa ballongfärder bliva därför i längden dyrbara, då man för att nå något resultat nödgas förbruka åtskilliga instrument.

Observationer med obemannade ballonger hava företagits i mängd på platser över hela den civiliserade världen ofta i mycket stor skala. Ivrigast har den franske meteorologen Teisserenc de Bort sysslat därmed. En förmögen man som han var, död 1913, upprättade han till stor del av egna medel, ett utomordentligt välrustat meteorologiskt observatorium i Trappes utanför Paris. Detta observatorium blev en av huvudplatserna för utforskningen av de högre luftlagren. Professor Hildebrandsson i Uppsala samarbetade under många år med Teisserenc de Bort, och tack vare detta samarbete utfördes i Sverige under åren 1907—1909 ett flertal ballongundersökningar. Delvis med understöd av svenska mecenater men huvudsakligen på Teisserenc

de Borts bekostnad uppsändes under dessa år i Kiruna sammanlagt 72 ballonger med instrument, av vilka så småningom 41 kommo till rätta, ett överraskande stort antal med hänsyn till de glest befolkade trakter det här gäller. En del instrument upphittades först efter 3 års förlopp men gåvo dock fullt läsbara resultat. Kiruna valdes som utgångspunkt för ballongerna, emedan det gällde att erhålla observationer från en så nordlig plats som möjligt, och om platsen hade valts i de tätare befolkade kusttrakterna hade sannolikt antalet funna ballonger blivit färre. De flesta instrumenten hittades i gränstrakterna mellan Sverige och Finland. Allmänheten var genom kringspridda upprop på svenska, finska och lapska beredd på de kringflygande ballongernas förekomst, och varje insänd apparat renderade upphittaren en ordentlig hittelön. År 1908 uppsändes 8 ballonger från Göteborg, vilka alla upphittades. I övrigt hava här i Sverige ej utförts några undersökningar med obemannade ballonger. Så mycket talrikare ha de däremot varit i andra länder, framför allt i Tyskland, Frankrike och Amerika.

Nu några upplysningar om resultaten av dessa nog så dyrbara undersökningar. Vid uppsändandet av ballongerna följas de med teodolit så långt som möjligt, varigenom erhålles vindriktningen i de luftlagar som passeras. Det första resultat man vann, var också en bekräftelse på de slutsatser man redan dragit ur molnobservationerna beträffande atmosfärens rörelse. Kirunaballongerna t. ex. i vilken vind de än uppsändes, blev alltid resultatet, att de om de nått tillräcklig höjd återfunnos öster om Kiruna, visande, att ballongerna på större höjd alltid kommit in W- o. NW-vindar, den vindriktning, som skulle råda i den stora polarvirveln.

Ett annat viktigt problem som ballongförsöken lämnat besked om, är frågan om temperaturfördelningen på olika höjder. Under normala förhållanden avtar ju temperaturen ju högre upp man kommer, men det är å andra sidan särskilt om vintern ingen ovanlig företeelse, att

temperaturen först stiger med höjden för att på större höjd åter börja sjunka, eller att man har med en s. k. temperaturinversion att göra. Nu hade man vid undersökningarna med bemannade ballonger tyckt sig finna, att på större höjder detta inversionsfenomen rent av skulle vara det normala. På lägre höjder influeras temperaturförhållandena i allra högsta grad av jordytan, särskilt utstrålningen från denna, varjämte de vertikala strömningarna bidraga till ett utjämnande av temperaturen. I lägre luftlager kan därför en temperaturinversion lätt uppkomma under olika omständigheter, men det var icke dessa inversioner utan den nämnda normala inversionen i luftlager, som redan till största delen äro undandragna jordytans direkta inflytande, vilken skulle göras till föremål för undersökningen.

Med tillhjälp av de obemannade ballongernas meteorografer har man nu funnit, att vid ungefär 10 000 m:s höjd alltid förefinnes en dylik temperaturinversion. På de närmaste tusentalen meter, 10 à 14 000 m:s höjd, stiger temperaturen något eller håller sig i det närmaste oförändrad, men vid ännu större höjd inträda åter normala förhållanden: temperaturen sjunker. Såsom exempel på de temperaturer och höjder det här rör sig om, må anföras några siffror från en obemannad ballong uppsänd i Kiruna den 24 februari 1908. På 500 m:s höjd visade termometern — 14°,2, på 1 500 m — 10°,7: här förefinnes således det kalla vinterdagar vanliga fenomenet, att det är varmare på större höjd. Sedan inträder normala förhållanden: 3 000 m —17°,4; 6 000 m —32°,0; 10 000 m —58°,6; 11 130 m —64°,7; sedan kom temperaturinversionen, och temperaturen höll sig omkring — 60° på höjden 12 000—16 000 m. Därefter sjönk temperaturen åter; den blev på 20 000 m —66°,4 och på 22 760 m —69°,1. Detta är den största höjd, som nåddes vid Kirunaförsöken. Med bemannade ballonger vore det naturligen ej möjligt att komma ens tillnärmelsevis till sådana höjder.

Inversionshöjden växlar både med platsen och årstiden.

Det varmare luftlagret ligger högre över ekvatorn än över polartrakterna och högre på sommaren än på vintern. Höjden växlar även med den vid jordytan rådande väderleken. Att gå in på detaljer är emellertid så mycket mindre skäl till, som undersökningarna ännu ej kunna anses avslutade eller någon tillfredsställande teori kunnat uppställas. Några konstanta temperaturer på olika höjder kan det ej bli tal om, därtill är lufthavet alltför oroligt. Den lägsta temperaturen, som uppmättes vid Kirunaförsöken var — 75°,6, men detta redan vid 11 100 m:s höjd. Den nyss nämnda ballongen gav däremot endast — 69°,1 på nära 23 000 m:s höjd. Den lägsta temperatur man över huvud direkt uppmätt i atmosfären är — 84°. Huru temperaturförhållandena gestalta sig på större höjder än c:a 25 km, har ej varit möjligt att rent experimentellt utforska, utan är man i det avseendet hänvisad till teoretiska spekulationer.

Genom ballongundersökningarna har således fastslagits, att vid ungefär 10 000 m:s höjd upphör temperaturen plötsligt att avtaga med ökad höjd; i stället håller sig temperaturen konstant inom ett lager av ett par tusen meters mäktighet. Detta lager har fått namnet stratosfären. Över stratosfären avtager temperaturen åter. Inom stratosfären växlar temperaturen med årstiden, fast variationerna äro väsentligt mindre än vid jordytan, ej heller förekomma där några hastiga temperaturvariationer. Någon förklaring till stratosfärens förekomst har man ej lyckats finna.

Det är icke endast genom ballonger man försökt avlocka de högre luftlagren deras hemligheter; även den gamla hederliga draken har vid dessa undersökningar kommit till användning. Draken har en lång och hedrande historia i vetenskapens tjänst, fast den nu börjar bliva omodern. Redan 1749 omtalas försök att avläsa temperaturen i högre luftlager medelst på drakar anbringade minimitermometrar. Några år senare, 1752, utförde Franklin sina ryktbara försök, då han med tillhjälp av drakar lyckades visa, att åskmolnen voro elektriskt laddade; det var den första stora tjänsten draken gjorde vetenskapen.

Först på 1890-talet togos emellertid drakar i vetenskapens tjänst på allvar. Det är icke den triangelformade leksaksdraken, som användes, utan vanligen en av australiern Hargrave konstruerad modell. Den har formen av en 2 m hög och lika lång och 1 m bred lådliknande ställning av lätta träribbor, som hållas väl stagade av spända ståltrådar. Ställningen är sedan överklädd med väv, och man erhåller samma ungefärliga modell, som vingarna på ett modernt biplan. Meteorografen fästes sedan vid draken inuti själva träställningen. Skall instrumentet lyftas till större höjd måste flera drakar kopplas till samma lina ofta ända till 8 à 10 stycken. Den lina, som skall uppbära påfrestningen från en rad drakar i hård vind, måste naturligen vara ganska stark. Vanligen användas ungefär millimetertjocka ståltrådslinor, som lindas upp på en träeller järnvals, denna manövreras sedan helst med en elektrisk motor. Med drakar kan man nå upp till 6 à 7 km:s höjd, och då draken ej stiger rakt uppåt, fordras ofta en 10 à 12 km lång lina. Drakar fordra stor påpasslighet vid manövreringen. Spänningen i linan avläses hela tiden på en dynamometer, och det gäller att, när linan vid en vindstöt löper fara att spännas mera än den tål, låta linan löpa ut med lagom stor hastighet, likaledes att hala in linan, när den slaknar, för att ej riskera, att hela ekipaget slår i marken. Arbetet med drakar drager även det dryga kostnader, då drakar och framför allt linor förbrukas i stora mängder. Vidare är arbetet mera komplicerat än då ballonger användas. Ej heller kan man nå större höjder än c:a 7 km. Drakar hava dock använts ofantligt mycket. Skötta av en skicklig navigator kunna de hållas svävande i timmar på nära nog samma ställe. De kunna även bära tyngre och därmed noggrannare instrument och kunna dessutom förses med en anemometer för registrering av vindhastigheten. Vid expeditioner på världshaven äro drakarna mycket användbara; om en snabbgående ångare manövreras väl, kan draken pressas upp till stora höjder (7 km).

Drakarna användes först i Amerika. I Europa var det åter Teisserenc de Bort, som först utförde drakobservationer i större skala. På hans observatorium i Trappes ordnades snart systematiska drakuppstigningar. I samarbete med Hildebrandsson upprättade han år 1902 delvis på egen bekostnad en drakstation på Jutland, särskilt lämplig plats på grund av det fria och för alla vindar öppna läget. Under åren 1902 och 1903 utfördes där både dag och natt drakuppstigningar, varigenom ett synnerligen värdefullt observationsmaterial hopbragtes. Stationen nedlades sedan på grund av de stora kostnaderna. Vid den tiden började även ballongen alltmera utträngа draken.

Till sjöss hava synnerligen viktiga expeditioner företagits. Impulsen till dylika gavs av den nämnda svensk-franska stationen på Jutland, som anordnade ett par försöksfärder på Kattegatt. 1904 och 1905 företogos sedan expeditioner, som utrustades av fursten av Monaco och Teisserenc de Bort. Den förre har även han ställt sina stora inkomster till vetenskapens förfogande. Vid dessa expeditioner kommo både drake och ballong till användning. De revolutionerande resultaten av molnobservationerna voro då nya, och det var mellan dem och de äldre teorierna striden stod och skulle avgöras till sjöss. Under intensivt arbete samlade dessa sjöexpeditioner det felande observationsmaterialet över världshaven. Undersökning av vindriktningen utfördes med friballonger, vars läge bestämdes genom pejlingar medelst kompass och sextant, naturligtvis under användande av ångarens högsta fart. En del ballonger förseddes även med meteorografer, men det blev att kasta pengar i sjön; trots alla vidtagna försiktighetsmått visade det sig svårt att återfinna instrumenten.

Resultatet av alla dessa dyrbara expeditioner blev kort och gott: en lysande seger för molnobservationerna. Den enkla men sent tillgripna metoden att observera molnens gång visade sig giva lösningen till ett problem,

varöver hade spekulerats åtskilligt, innan man kommit på den idén att låta fakta tala!

De temperatur- och fuktighetsbestämningar, som utfördes under sjöexpeditionerna med drakar och ballonger, stämde även väl överens med observationerna till lands.

I det föregående har det endast talats om några av de problem, som måste lösas, innan man kan säga, att kännedomen om jordens atmosfär är ens tillnärmelsevis fullständig. Såsom exempel på spörsmål, som ännu tarva undersökning, må nämnas: fuktigheten och den därmed i samband stående regn-, snö- och hagelbildningen, värmestrålningen till och från jorden, luftens halt av främmande ämnen, såsom ozon, bakterier, växtdelar, damm m. m., ljudets fortplantning i vertikal riktning, fysiologiska verkningar av luftförtunningen samt framför allt det viktiga problemet om luftelektriciteten.

Det är ett icke ringa forskararbete, som de senaste 30 åren har bedrivits i de högre lagren av vår atmosfär. En av drivfjädrarna till de ivriga forskningarna har varit hoppet att på så sätt lyckas få ett säkrare grepp på problemet att »spå väder». Det är icke endast vid jordytan man har att söka väderleksfaktorerna, även de högre luftlagren spela här en stor roll. Hittills kan ju resultatet i detta avseende synes skäligen magert, men utforskningen av ett område, som även bokstavligen talat är av ett sådant omfång, går icke på en dag. När det gäller väderleken, har man för övrigt icke endast att räkna med telluriska faktorer, även andra himlakroppar och framför allt solen spela en avsevärd roll, och innan den rollfördelningen är klarlagd, lär det ej heller lyckas att vara en fullkomlig väderleksprofet.

Astons undersökningar över grundämnenas mass-spektra.

AV EVA RAMSTEDT.

År 1815 uppställde engelsmannen *Prout* hypotesen, att alla ämnen bestode av en och samma ursubstans, nämligen väte. Detta skulle då innebära, att alla atomer äro uppbyggda av väteatomer och sålunda alla atomvikter kunna uttryckas med hela tal, om vätets atomvikt tages till enhet.

De noggranna atomviktsbestämningar, som utfördes under 1800-talet, syntes dock ej ge stöd åt Prouts tanke. Visserligen befunnos atomvikterna i anmärkningsvärt många fall, särskilt bland de lättare elementen, ligga mycket nära hela tal, när syrets atomvikt sattes till 16,00. Men det fanns också exempel på motsatsen, såsom klor, at. v. 35,46, koppar 69,57, magnesium 24,32, för att endast nämna några.

Med tiden har emellertid omständigheter blivit bekanta, som tydligt peka på att atomerna åtminstone ha gemensamma byggnadsstenar. Då t. ex. ett radioaktivt ämne sönderfaller, utsändas ur atomernas inre antingen elektroner i form av β-strålar eller positivt laddade heliumatomer som α-strålar. Detta anger, att sådana ämnens atomer delvis måste vara uppbyggda av elektroner och heliumatomer. Mångenstädes inom det periodiska systemet är skillnaden mellan två ämnens atomvikter 4, d. v. s. just heliums atomvikt. Korresponderande ämnen inom radium- och toriumserierna skilja sig från varandra med 2 enheter, alltså motsvarande i det närmaste två väteatomer.

De ojämna atomvikterna har man också på senare tid tänkt sig möjligheten av att kunna förklara med stöd av ett annat fenomen, som uppträder bland de radioaktiva ämnena, nämligen *isotopien*. Isotopa äro ämnen, som, ehuru de ha olika atomvikt och förhålla sig olika i radioaktivt hänseende, dock äro kemiskt och elektrokemiskt oskiljbara, de hava till och med samma optiska spektrum och samma röntgenspektrum, eller ock skilja sig deras spektrallinjers läge utomordentligt litet från varandra. Dessa ämnen intaga även samma plats i det periodiska systemet.[1]

För några av de till radioaktivitetens område hörande ämnena ha isotopernas existens blivit direkt experimentellt påvisad. Atomvikterna för slutprodukterna i uran-radiumserien, radium *G* eller uranbly, och i toriumserien, torium *E*[2] eller toriumbly, ha uppmätts till resp. 206,0 och 208,0, under det att det från dem oskiljbara, vanliga blyet har atomvikten 207,2. Har man nu en blandning av två eller flera isotoper, kommer blandningens atomvikt att bero på proportionen mellan dessa. Det är därför möjligt, att vanligt bly i själva verket ej är enkelt, utan sammansatt av isotoperna uranbly och toriumbly med det senare i något överskott.

Tanken har då framkastats, att även andra grundämnen med ojämna atomvikter skulle kunna bestå av två eller flera isotoper med jämna atomvikter. Det är emellertid mycket svårt att påvisa isotoper, som ej äro aktiva. Det kan endast ske med stöd av sådana egenskaper, som direkt bero på atomernas massa, såsom diffusion i gasform, fraktionerad destillation eller avböjning av ämnenas kanalstrålar i elektriska och magnetiska fält.

Kanalstrålar uppkomma i ett urladdningsrör, då de positiva gasjonerna i röret genom den pålagda elektriska spänningen få så stor hastighet, att de flyga genom hål i katoden och uppträda på dess baksida som rätliniga strålar. Då de laddade kanalstråleparticlarna möta ett

[1] Se härom *I. Bolin*, denna tidskrifts första årgång sid. 91 (1917).

[2] Tyskarna kalla vanligen detta ämne torium *D*.

elektriskt eller magnetiskt fält, avböjas de ur sin rätliniga bana, och avböjningens storlek beror dels på förhållandet mellan partikelns laddning (E) och massa (m), dels på dess hastighet.

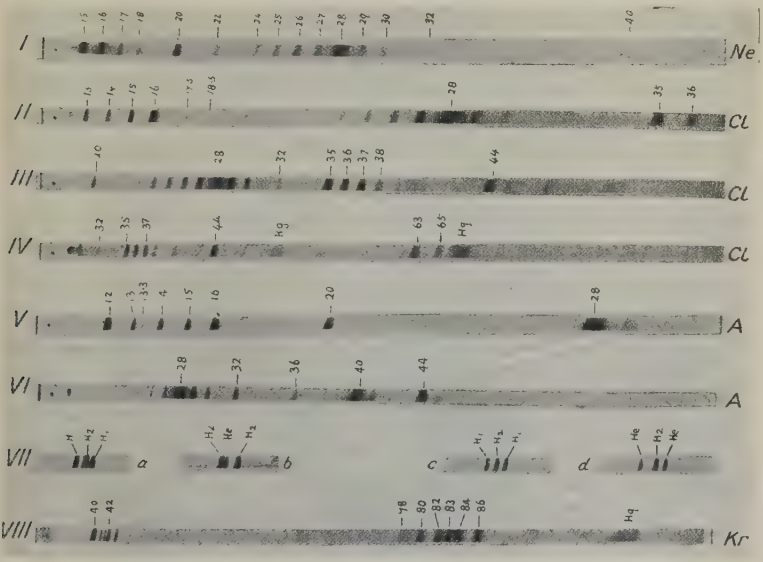
Vid en del utomordentligt vackra försök lät *J. J. Thomson* de båda fälten verka samtidigt och parallellt med varandra. Han kunde då visa, att strålar med samma E/m, men olika hastighet träffa en fotografiplåt, som insättes vinkelrätt mot strålarnas fortplantningsriktning, utefter en parabelbåge. Ur bågens läge kan förhållandet E/m beräknas. Av försöken framgår, att kanalstrålarna bestå av vanligen positivt laddade atomer och atomkomplexer, som härröra från gaserna i urladdningsröret.

Med luft erhöll Thomson parabler, som tillhörde dels luftens vanliga beståndsdelar, dels de sällsynta gaserna därstädes. Därvid syntes *neon* ge två olika parabler, en som svarade mot atomvikten 20 och en annan, mycket svagare, motsvarande atomvikten 22. Detta antydde, att neon ej var enkelt utan sammansatt av två gaser, av vilka den med atomvikt 22, kallad *metaneon*, endast förefanns i små mängder.

Thomsons medhjälpare *F. W. Aston* igångsatte då försök att skilja neon och metaneon medelst diffusion genom piplera. Efter tusentals gånger upprepad diffusion fick han två fraktioner, som skilde i täthet på 0,7 %. Arbetet avbröts emellertid genom kriget och upptogs först efter dess slut. En med ännu större noggrannhet upprepad diffusionsserie gav det nedslående resultatet av en skillnad i täthet på endast 0,3 %. Försök att skilja de båda gaserna genom fraktionerad destillation slogo ävenledes fel.

För Aston syntes då enda sättet vara att återgå till kanalstråleanalysen, men utveckla den till större precision. Detta har också lyckats honom genom en väl utförd matematisk beräkning i förening med stor experimentell skicklighet. De ernådda, verkligt epokgörande resultaten äro publicerade i Philos. Magazine, dec. 1919, april, maj, juni 1920.

Aston låter ett smalt knippe kanalstrålar passera först ett elektrostatiskt fält, som utbreder dem, och sedan ett magnetiskt fält, vars kraftlinjer gå vinkelrätt mot det förras och så, att avböjningen går åt motsatt håll. Magnetfältet är så avpassat, att det, i analogi med en lins vid optiska försök, böjer tillsammans alla kanalstrålar med samma E/m till en kort brännlinje. Då dennas intensitet blir mycket större än den utbredda parabelns, kan man använda bättre av-



gränsade strålknippen, varigenom precisionsmöjligheterna i hög grad ökas. De olika partiklarnas brännlinjer falla efter en rät linje, längs vilken en fotografiplåt insättes. På denna erhålles då ett slags spektrum, kallat *mass-spektrum*, såsom ovanstående figur visar. Varje linjes läge svarar mot ett bestämt värde på E/m eller, som Aston uttrycker det, $\frac{m}{E}$. Ju större m/E, desto längre åt höger ligger linjen. Vid samma fält tilltaga avstånden direkt med massan. Genom plåtens stegvisa förskjutning kunna flera spektra

avfotograferas efter varandra på samma plåt. Ju starkare det magnetiska fältet är, desto längre åt vänster rycka de olika linjerna. Deras intensitet beror på den närvarande mängden av motsvarande massa.

Vid försök med koloxid, där kranfett även förorsakade närvaro av kolväten, erhöllos linjer, som svarade mot C (massa 12), CH (13), CH_2 (14), CH_3 (15) och CH_4 (16). Dessa linjer synas längst till vänster på spektrum II på planschen, 15 och 16 även på spektrum I. Genom att med givna fält bestämma läget av några linjer med känd massa, kunna dessa sedan användas som referenslinjer för beräkning av andra linjers massor. Ökas det magnetiska fältet, framträder hos koloxid en ny grupp av linjer, nämligen 24, 25, 26, 27, 28, 29 och 30. Särskilt kraftig är 28. Den kunde motsvara C_2H_4, men är troligen CO själv. Ännu längre åt höger iakttages linjen 44 motsvarande CO_2.

I samma rör tillfördes sedan neon, varvid nya linjer uppträdde (se spektr. I), en stark vid 20, en svagare vid 22, möjligen antydan till en vid 21. Med svagare fält syntes även linjer vid 10 och 11, motsvarande 20 och 22 med dubbel laddning. Linjer hörande till enkel laddning sägas vara av 1:a ordningen, till dubbel laddning av 2:a ordningen o. s. v. Man kan ej längre hysa tvekan om metaneons existens. Bland de vanliga elementen är det alltså hos neon som isotopi för första gången påvisats. Neons på kemisk väg funna atomvikt 20,2 förklaras med att neon med atomvikt 22 (Ne^{22}) finns i mycket mindre kvantiteter än neon med atomvikt 20 (Ne^{20}), vilket även linjernas olika intensitet anger.

Av synnerligen stort intresse äro de undersökningar, som utförts på klor (at. v. 35,46). Resultatet framgår av spektra II, III och IV, vilka äro tagna med koloxiklorid ($COCl_2$) i röret. På spektrum II framträda tydligt linjerna 35 och 36 och på de båda övriga 35, 36, 37 och 38. Av någon linje 35,46 ser man däremot intet spår. Det är alltså fullt klart, att *klor är en blandning av isotoper*, man skulle kunna tänka sig fyra, men Aston anser mera tro-

ligt, att isotoperna äro Cl^{35} och Cl^{37}, och att linjerna 36 och 38 svara mot deras respektive väteföreningar HCl^{35} och HCl^{37}. Svaga linjer av 2:a ordningen, 17,5 och 18,5, synas på II. De starka linjerna 63 och 65 på IV tillhöra antagligen $CO\,Cl^{35}$ och $CO\,Cl^{37}$. Överallt äro linjerna för Cl^{35} starkare än för Cl^{37}. Enligt den kemiskt funna atomvikten bör också den förra finnas i tre gånger så stor mängd som den senare. Den svaga linjen vid 39 anger möjligen en tredje isotop. På IV framträda också några kvicksilverlinjer.

V och VI äro mass-spektra för argon (at. v. 39,88) med den starka linjen 40 och däremot svarande linjer av 2:a och 3:e ordningen, 20 och 13,3. Troligen existerar i små mängder en isotop 36, vilket förklarar, att atomvikten ligger något under 40.

Ett intressant mass-spektrum ger krypton i VIII med icke mindre än fem starka linjer 80, 82, 83, 84 och 86 samt en svag vid 78. Ett tydligt 2:a ordningens spektrum synes längst till vänster. Hos krypton iakttogs för första gången isotoper, vilkas atomvikter skilde sig på endast en enhet.

Det var förenat med särskilda svårigheter att bestämma massan hos de lätta ämnena helium och väte, då deras linjer ligga långt ifrån referenslinjerna. Aston tillämpade här en speciell metod att jämföra en massa, som är dubbelt så stor som en annan. Han hade två fullständigt lika ackumulatorbatterier på 250 volt. Alstras det elektrostatiska fältet med dessa batterier kopplade först parallellt och sedan i serie, under det att det magnetiska fältet hålles konstant, komma linjer motsvarande massor, som förhålla sig som två till ett, att sammanfalla på plåten. Då är det emellertid svårt att fullt exakt bestämma deras läge. Men om från den ena potentialen en liten spänning ena gången lägges till, andra gången drages ifrån, erhållas två linjer omslutande den tredje.

Tre exponeringar gjordes t. ex. i väte med potentialdifferenserna 250, $500 + 12$ och $500 - 12$ volt. Därav

erhölls spektra VII a och c, som visa, att vätemolekylens linje är symmetriskt omgiven av atomens linjer, den förra har alltså precis dubbelt så stor massa som den senare. Vid liknande försök i väte och helium ligga emellertid ej vätemolekylens linjer symmetriskt kring heliumlinjen (se VII b), ej heller vid omvändning heliumlinjerna symmetriskt kring vätemolekylens linje (VII d). Därav framgår otvetydigt, att vätemolekylens massa är mer än hälften av heliums. På samma sätt jämfördes helium med en dubbelladdad syreatom (8) och befanns vara precis hälften av denna.

Av dessa försök kan man draga den viktiga slutsatsen, att väte är ett enkelt element, liksom även syre och helium, och att vätets atomvikt, som med så stor omsorg bestämts enligt vanliga metoder, också betecknar atomens verkliga massa.

Sammanlagt har Aston undersökt 18 olika grundämnen, vilka antingen själva äro gaser, eller av vilka gasformiga föreningar lätt kunna erhållas. Bestämningarnas noggrannhet uppskattas till 0,1 %. Den är sålunda knappast mindre än den, som erhålles med vanliga kemiska metoder. Men den har den stora fördelen framför dessa, att man erhåller ej blott medelvärlden för ämnenas atomvikter, utan atomvikterna hos var och en av de ingående konstituenterna. Astons resultat äro sammanfattade i tabellen på nästa sida, där första kolumnen anger ämnet, den andra atomnumret, den tredje medelatomvikten, bestämd på kemisk väg, och den fjärde isotopernas massor, ordnade efter avtagande intensitet. I tveksamma fall är talet satt inom parentes.

Av de i tabellen anförda ämnena äro endast 9 enkla, nämligen väte, helium, kol, kväve, syre, fluor, fosfor, svavel och arsenik. För alla dessa ligga också de kemiskt bestämda atomvikterna mycket nära hela tal. Men i alla de fall, där atomvikterna väsentligt avvika därifrån, har man funnit minst 2 isotoper. Förefintligheten av kvicksilverisotoper har också nyligen på annat sätt påvisats av Brönsted och Hevesy, vilka genom upprepade destillationer av kvick-

Tabell.

Ämne	Atom-nummer	Atom-vikt	Isotopernas massor
H	1	1,008	1,008
He	2	4,00	4
B	5	10,9	11, 10
C	6	12,00	12
N	7	14,01	14
O	8	16,00	16
F	9	19,00	19
Ne	10	20,2	20, 22, (21)
Si	14	28,3	28, 29, (30)
P	15	31,04	31
S	16	32,06	32
Cl	17	35,46	35, 37, (39)
A	18	39,88	40, (36)
As	33	74,96	75
Br	35	79,92	79, 81
Kr	36	82,92	84, 86, 82, 83, 80, 78
X	54	130,2	(128, 131, 130, 133, 135)
Hg	80	200,6	(197—200), 202, 204

silver i vakuum erhållit två fraktioner, som skilja i täthet på 0,005 % (Nature, okt. 1920). Värdena på isotopernas massor äro däremot alla hela tal inom försöksfelen med undantag för väte. Man bör därav kunna draga den slutsatsen, att *alla ämnen äro uppbyggda av partiklar med massa 1.*

Enligt Rutherford-Bohrs atommodell[1] består som bekant atomen av en positivt laddad kärna av mycket små dimensioner, i vilken atomens massa är koncentrerad, samt negativt laddade elektroner, som röra sig i ringar kring kärnan till ett antal så stort, att deras sammanlagda negativa laddning motsvarar kärnans positiva. Av undersökningar inom röntgenstrålarnas och radioaktivitetens område framgår, att om man ordnar ämnena i samma följd som i det periodiska systemet, ökar laddningen på atomens kärna med en elementarladdning (e) för varje ämne, så att

[1] se *Bolin*, loc. cit.

atomens ordningsnummer i systemet, *atomnumret*, även anger storleken av kärnans positiva laddning. Isotoper, som alltid inta samma plats, ha samma kärnladdning.

Sålunda antas vätekärnans laddning vara 1 e, dess massa är 1,008, och den omkretsas av en elektron. Heliums kärnladdning är 2 e. Är dess kärna, vars massa är 4,00, uppbyggd av väte, borde den bestå av 4 vätekärnor, som sluta sig tillsammans med 2 elektroner. Det låge då närmast att antaga, att heliums atomvikt skulle vara $4 \cdot 1{,}008 = 4{,}032$ i stället för 4,00. Att så ej är fallet, har man förklarat på följande sätt:

Enligt modern uppfattning motsvarar varje energiform en viss massa. Den lilla positivt laddade kärnan är säte för ett starkt elektriskt fält, som på grund av sin energi ger upphov till massa. Om nu flera vätekärnor tillika med elektroner sammansluta sig i ytterst intim beröring, deformeras deras ursprungliga fält, och man kan följaktligen ej göra en additiv beräkning av massan. Den massa, som en vätekärna representerar, då den ingår i en koncentrerad kärnsammanslutning, synes vara just 1 (O = 16). En atom av massa *m* skulle då övergå till en annan av massa $m + 1$ genom upptagande av en vätekärna och en elektron. Inträda båda i kärnan, ändras ej dess laddning, utan en isotop uppstår. Inträder däremot endast vätekärnan i atomens kärna, erhålles ett ämne av närmast högre atomnummer.

Ännu ett stöd för att atomerna ytterst bestå av väte lämnar Rutherfords märkliga upptäckt (Philos. Magaz., juni 1919), att då kemiskt ren kvävgas bombarderas med hastiga α-partiklar, *enstaka vätepartiklar utstötas ur kväveatomernas kärnor*. Detta fenomen betecknar också den första *på artificiell väg åstadkomna atomsönderdelningen*, och ehuru utbytet är utomordentligt litet, så litet, att man ej har minsta hopp att kemiskt kunna påvisa det erhållna vätet, är fenomenet av största betydelse just för kunskapen om kärnans urbeståndsdelar.

Många äro de spekulationer, som gjorts över den Proutska hypotesen under det gångna århundradet. Den

enhetstanke, som låg till grund för densamma, syntes tilltalande, men man tvangs att förkasta den på grund av med densamma oförenliga experimentella fakta. Först mer än hundra år efter dess uppställande har i ett slag genom Rutherfords och Astons glänsande undersökningar experimentell bekräftelse vunnits på hypotesens riktighet.

Emellertid tyder allt på att icke alla vätekärnor existera fritt i övriga atomers kärnor, utan att en del av dem sluta sig tillsammans med elektroner till stabilare system, som sedan i sin tur bilda byggnadsstenar i andra atomers kärnor. En sådan är utom allt tvivel heliumkärnan, som stundom utkastas som en α-partikel. Rutherford har också vid bombardering av kvävgas och syrgas påvisat en annan antaglig byggnadssten, som synes ha massa 3 och kärnladdning $2\,e$ och sålunda vara isotop till helium. Hur dessa och möjliga andra sammanslutningar ordna sig inom olika atomers kärnor, därom veta vi ännu intet. Det må bli framtidens sak att vidare utveckla kärnans struktur.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Några ord med anledning av Prof. C. W. Oseens uppsats »Om Einsteins speciella relativitetsteori».

Prof. *Oseen* har gjort mig den äran att framställa några anmärkningar i anslutning till min uppsats »Om utgångspunkten i *Einsteins* relativitetsteori».[1] Han hade också den vänligheten att låta mig taga del av sin uppsats före dess tryckning och uppmanade mig sedermera att offentligt belysa de missförstånd av mina tankar, som där förekomma.

Jag ber då först få påpeka, att jag *icke* sagt, att om »*erfarenheten* leder till det resultat, att en överljushastighet finnes, relativitetsteoriens motsatta åsikt icke kan anföras såsom bevis häremot». Skulle erfarenheten säga detta, så vore ju relativitetsteorien därmed omkullbevisad. Jag har endast sagt, att om en »åskådning» leder etc. Denna »åskådning», som jag gjort mig, eller den hypotes, som jag uppställer, är den, att det finnes en eter och att etern är en gas eller en med densamma jämförlig kropp. Då kan man på densamma tillämpa den kinetiska gasteorien, och enligt denna ha smådelarna i gasen en större medelhastighet än vågrörelsen i gasen. Således måste eterns smådelar hava en medelhastighet, som är större än fortplantningshastigheten av en vågrörelse i etern d. v. s. av ljuset. Det måste således enligt denna åskådning finnas hastigheter, som äro större än ljusets.

Det är också på grund av denna åskådning, som jag i min uppsats begagnat ordet »rörelse» i fråga om ljuset.

[1] Denna tidskrift, 1920—1921, 2:a häftet sid. 92.

Prof. Oseen föreslår i stället för ordet »rörelse» uttrycket »Periodisk ändring av det elektromagnetiska fältet». Men det är mig oklart, *vad* ett sådant »fält» är, och *hur* det skall kunna ändra sig, utan att en rörelse förefinnes. Däremot kan jag få en klar föreställning om detsamma, om jag tänker mig det bero på parallellrörelser och virvlar i etern. Detta har jag också matematiskt formulerat, och det visar sig, att de *Maxwell-Hertz*'ska och de *Lorentz*'ska differentialekvationerna för det elektromagnetiska fältet kunna härledas, om man antager, att i etern finnas rotationer, och om man preciserar, under vilka förutsättningar rörelsen försiggår.

Prof. *Oseen* anför, att vetenskapens historia visar, det eterteorien är ofruktbar. Detta kan betyda, att eterhypotesen är oriktig, men vida sannolikare synes det mig vara, att man icke använt den på rätta sättet, d. v. s. tillskrivit etern egenskaper, som den icke äger (t. ex. fast form och orörlighet) och icke tagit i betraktande egenskaper, som den verkligen äger. I fråga om eterns renässans vill jag påpeka, att jag icke är den ende, som tror, att eterhypotesen icke är död. Bland framstående vetenskapsmän nämner jag blott nobelpristagaren *Lenard* och *Oliver Lodge;* och i oktoberhäftet av Annalen der Physik finnes en avhandling av prof. *E. Wiechert*[1] i Göttingen, som helt och hållet står på min ståndpunkt. Jag anför här några citat (i översättning).

(s. 302). »Så trodde t. ex. många anhängare av den speciella relativitetsteorien, att relativitetsprincipen tvingade till uppgivandet av eterföreställningen, och dock kom teorien vid dess vidare utbildning till den 'allmänna' relativitetsteorien själv därhän att på ett grundläggande sätt begagna sig av eterföreställningen[2] ..... Så vilja vi visserligen akta oss för att ringa uppskatta den allmänna rela-

[1] *E. Wiechert*, Die Gravitation als elektrodynamische Erscheimung; Ann. d. Phys. Bd. 63. s. 301. 1920.

[2] *A. Einstein*, »Die Naturwissenschaften 6. s. 697—702. 1918; Schlussbemerkungen.

tivitetsteoriens storartade arbete och gärna fröjda oss åt dess matematiska skönhet, men därför skola försöken icke uppgivas att uppbygga teorien, i det vi, utgående från det redan kända, fråga oss, vilka ändringar äro nödvändiga, för att den skall anpassa sig efter företeelserna.

Ånyo ... visar sig, att materien blott kan förstås, om man uppfattar den i sammanhang med världsetern såsom bildningar av särskild art i densamma.»

Den matematiska skönheten i relativitetsteoriens framställning, vilken är för den rene matematikern i så hög grad tilltalande, är i mitt tycke icke tillräcklig för att överskyla de många fall, då denna teoris konsekvenser stöta det sunda förståndet för huvudet. Och tager man i betraktande den ovanliga reklam, som i dagspressen gjorts för relativitetsteorien, så synes det mig icke olämpligt, om det påpekas, att relativitetsteorien icke saknar sin blotta.

C. A. Mebius.

Matematiska uppgifter.

85) En triangels vinklar bilda en aritmetisk progression, och summan av kuberna på deras sinus är $\frac{3}{8}(3+\sqrt{3})$. Beräkna vinklarna. *G. B—k.*

86) Om l, m, n äro föreningslinjerna mellan spetsarna A, B, C i en triangel och inskrivna cirkelns medelpunkt, så är

$$\frac{l^2}{bc}+\frac{m^2}{ca}+\frac{n^2}{ab}=1.$$

87) På en linje a tagas punkterna A_0, A_1, A_2 ... och på linjen b punkterna B_0, B_1, B_2 ... så, att för alla ν linjerna $A_\nu B_{\nu+1}$ äro parallella, och likaledes linjerna $B_\nu A_{\nu+1}$. Bevisa, att linjerna $A_{2\nu} B_{2\nu}$ äro sinsemellan parallella, och likaledes linjerna $A_{2\nu+1} B_{2\nu+1}$. *X.*

88) Två cirklar råkas i A och B. Man drager en gemensam tangent. Uttryck rektangeln av avstånden från A och B till denna i $AB=a$ och den vinkel v, varunder cirklarna skära varandra. *X.*

89) En inskrivbar fyrhörnings hörnpunkter ligga på en konisk sektion. Visa, att bissektriserna till vinklarna mellan diagonalerna, och likaledes till vinklarna mellan två motstående sidors förlängningar äro parallella med den koniska sektionens axlar. *C. E. Blom.*

90) *ABCD* är en inskrivbar fyrhörning. Diagonalerna *AC* och *BD* råkas i *F*, och förlängningarna av *AB* och *DC* i *H*. Bevisa att bissektriserna till vinklarna vid *F* och *H* äro parvis parallella. *C. E. Blom.*

Lösningar till uppgifterna i h. 1. 1920—21.

73) *I en rätvinklig triangel är hypotenusan a, kateterna b och c. Sök avstånden mellan de vidskrivna cirklarnas medelpunkter, samt mellan dessa och den inskrivna cirkelns medelpunkt.*

Lätt inses att man får $r=p-a$, $r_a=p$, $r_b=p-c$, $r_c=p-b$. Ur figuren följer då omedelbart:

1) $O_bO_c=(p-b)\sqrt{2}+(p-c)\sqrt{2}=a\sqrt{2}$;

2) $O_aO_b=\sqrt{(p\sqrt{2})^2+[(p-c)\sqrt{2}]^2}=$

$$=\sqrt{\frac{(a+b+c)^2}{2}+\frac{(a+b-c)^2}{2}}=\sqrt{2a(a+b)}.$$

På snarlikt sätt fås då även:

3) $O_aO_c=\sqrt{2a(a+c)}$; 4) $OO_a=a\sqrt{2}$;

5) $OO_b=\sqrt{2a(a-c)}$ och 6) $OO_c=\sqrt{2a(a-b)}$.

Löst av *X* och *W. J.*

74) *Om* $x^3+y^3+z^3=x^2+y^2+z^2=x+y+z=1$, *så satisfieras systemet endast av 0-värden på två av de obekanta och 1 på den tredje.*

Kvadreras ekvationen $x+y+z=1$ (1) och därifrån drages $x^2+y^2+z^2=1$ (2); så fås $xy+xz+yz=0$ (3). Ku-

beras däremot (1) och minskas med $x^3+y^3+z^3=1$, så fås $6xyz+3xy(x+y)+3yz(y+z)+3xz(x+z)=0$, eller med hjälp av (1) $6xyz+3xy(1-z)+3yz(1-x)+3xz(1-y)=0$. Om häri insättes (3), så fås $xyz=0$. Om då t. ex. x är $=0$, så inses genast av (2) och (1) att antingen $y=0$, $z=1$ eller tvärtom. Liknande fås om y eller z sättes $=0$.

Anm. Enligt den allmänna teorin har ett ekvationssystem av tre ekvationer av resp. gradtalen p, q och r med tre obekanta inalles pqr lösningssystem. Här borde man således få 6 system, under det att ovanstående lösningsmetod blott ger tre. Denna motsägelse beror på att vardera lösningen måste räknas två gånger. Den cirkel, längs vilken planet $x+y+z=1$ skär sfären $x^2+y^2+z^2=1$, *tangerar* nämligen ytan $x^3+y^3+z^3=1$ i punkterna $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ och $(1, 0, 0)$. *X.*

75) *Varpå beror följande motsägelse:* (Se häftet 1.)

Felet ligger i att då man sätter $k+k_1=m$ och $k-k_1=n$ man likväl antar, att m och n var för sig kunna antaga alla heltalsvärden, då de likväl måste vara antingen båda jämna eller båda udda: man får nämligen $m+n=2k$ och $m-n=2k_1$. Samma fel brukar ofta göras vid trigonometriska ekvationssystems lösning.

I detta speciella fall ställer sig saken sålunda:

$$2^{7/6}\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2m\pi}{6}\right)e^{\frac{2n\pi i}{6}}$$

kan taga högst 36 värden, om m och n oberoende av varandra genomlöpa alla heltalsvärden, nämligen dem som erhållas för de 36 modulo 6 inkongruenta systemen (m, n). Bland dessa finnas 18 i vilka m och n hava samma paritet (bägge jämna eller bägge udda). Är (m, n) ett av dessa 18, så hör $(m+3, n+3)$ även dit, och de 18 ifrågavarande systemen kunna uppdelas i 9 sådana par. Nu tar vårt uttryck samma värde för systemen (m, n) och $(m+3, n+3)$, emedan båda faktorerna byta tecken, då resp. vinklar ökas med π. Således återstå högst 9 distinkta värden för (m, n).

X.

76) *Bestäm a och b så, att funktionen* $\frac{x^2+1}{2ax+3b}$ *har ett maximum* $=-1$ *och ett minimum* $=\frac{1}{4}$.

Sättes $y=\frac{x^2+1}{2ax+3b}$, så fås $x^2-2ayx-3by+1=0$, vilken ekvation löst med avseende å x skall få lika rötter för $y=-1$ och $y=\frac{1}{4}$. Sättes då dess diskriminant $=0$ för dessa y-värden, så fås systemet:

$$\begin{cases} a^2-3b-1=0 \\ a^2+12b-16=0. \end{cases}$$

vilket ger $\begin{cases} b=1 \\ a=\pm 2 \end{cases}$. Diskriminanten är i båda fallen $(y+1)(y-\frac{1}{4})$ varav genast ses, att -1 är max. och $\frac{1}{4}$ minimum. A priori kan man endast ålägga funktionen att taga *extremvärdena* -1 och $\frac{1}{4}$, ej vilket som skall bliva max. och vilket min. Att $+a$ och $-a$ samtidigt uppfylla villkoren är klart, då tillhörande kurvor ligga symmetriskt med avs. å y-axeln och alltså hava samma extremvärden.

X.

(Även löst av *W. J.*)

77) *Att konstruera en triangel, då man känner rektangeln av två sidor samt längderna av inre och yttre bissektriserna till mellanliggande vinkel.*

Om den givna rektangeln är d^2, inre och yttre bissektriserna v och v_1 resp., så blir lösningen följande: Avsätt på en linje $AP=v$ och $AD=d$ samt vinkelrätt däremot $AQ=v_1$. Drag QD och vinkelrätt mot densamma DO, som träffar QA:s förlängning i O. Tages O till medelpunkt för en cirkel genom D, vilken skär QP i C och dess förlängning i B, så är ABC den sökta triangeln.

Bevis: $QB \cdot QC = \overline{QD}^2 = QO \cdot QA$. Således ligga O, A, C, B på en cirkel, och vi hava $\angle QAC = OBC = OCB = OAB$, AP och AQ äro således bissektriserna v och v_1 till triangeln ABC. Men utdrages BA till den träffar cirkeln O i C_1, så är $AC=AC_1$ och således $AB \cdot AC = AB \cdot AC_1 = \overline{AD}^2 = d^2$. Triangeln ABC är således den sökta.

Möjlighetsvillkor: $v < d$. (Inga lösningar inkomna.)

78) c_0, c_1, $c_2 \ldots c_n$ *äro koefficienterna vid utvecklingen av* $(a+b)^n$. *Bevisa att* $c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 - \ldots + (-1)^n \frac{c_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

I. *Elementärt bevis:* Ur välbekanta egenskaper hos binomialkoefficienter framgår att $\frac{c_{\mu-1}}{\mu} = \frac{c_{n-\mu}}{n-\mu+1}$. Härav följer satsen omedelbart för *jämna* n, emedan då alla termer utom den sista försvinna. För udda n bevisas satsen sålunda: Låt $c_0 \ldots c_n$ vara koefficienterna vid utvecklingen av den udda digniteten n, och $k_0 \ldots k_{n+1}$ motsvarande för den följande jämna digniteten $n+1$, så är

$$k_{\nu+1} = c_{\nu+1} + c_\nu = c_\nu \frac{n-\nu}{\nu+1} + c_\nu = c_\nu \frac{n+1}{\nu+1} \quad \because \quad \frac{c_\nu}{\nu+1} = \frac{k_{\nu+1}}{n+1}.$$

Således det givna uttrycket

$$x = c_0 - \frac{c_1}{2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{n} - \frac{c_n}{n+1} = \frac{k_1}{n+1} - \frac{k_2}{n+1} + \ldots +$$

$$+ \frac{k_n}{n+1} - \frac{k_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}(k_1 - k_2 + \ldots + k_n - k_{n+1}).$$

Men $0 = (1-1)^{n+1} = 1 - k_1 + k_2 - \ldots - k_n + k_{n+1}$,

således $k_1 - k_2 + \ldots + k_n - k_{n+1} = 1$, varav $x = \frac{1}{n+1}$.

M—r.

II. *Bevis med integralkalkyl.*

$$(1-x)^n = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - \ldots + (-1)^n c_n x^n = \sum_{k=0}^{n}{}'(-1)^k c_k x^k$$

$$\because \int_0^1 (1-x)^n dx = \sum_{k=0}^{n}{}'(-1)^k c_k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n}{}'(-1)^k \frac{c_k}{k+1}.$$

Men $\int_0^1 (1-x)^n dx = \int_0^1 y^n dy = \frac{1}{n+1}$, varav satsen följer. *X.*

Om fyrhörningar och deras inskrivbara bissektrisfyrhörningar.

Av G. BOLINDER.

I.

§ 1.

I tredje årgången av denna tidskrift, häft. 4, finnes bland exemplen följande teorem:

Bissektriserna till vinklarna i en fyrhörning bilda alltid en inskrivbar fyrhörning; och om den förstnämnda fyrhörningen är inskrivbar, så äro den andras diagonaler vinkelräta mot varandra.

Uppritar man de fyra inre bissektriserna till vinklarna i en konvex fyrhörning $ABCD$, finner man, att de i allmänhet bilda tre olika fyrhörningar. En av dem, $O_1O_2O_3O_4$ (fig. 1), är konvex, en annan, O_2RO_4S, har två varandra skärande sidor, och den tredje O_1RO_3S har ett inåtgående hörn. Resultatet blir detsamma, om man i stället för de inre bissektriserna uppritar de yttre bissektriserna till vinklarna. Man inser genast, att det i teoremet måste vara fråga om de av bissektriserna bildade konvexa fyrhörningarna. Att dessa äro inskrivbara bevisas[1] lätt med tillhjälp av de vanliga satserna om bissektriserna till en triangels vinklar.

Av fig. 1 framgår, att var och en av punkterna O_1, O_2, O_3 och O_4 är skärningspunkt mellan bissektriser till två *närliggande* vinklar i $ABCD$. För att därför i det följande skilja $O_1O_2O_3O_4$ från fyrhörningarna O_2RO_4S och O_1RO_3S

[1] Tidskrift för elem. matem., fysik och kemi, årg. 4, häft. 2, sid. 124.

införa vi definitionen: *Med bissektrisfyrhörning till ABCD mena vi en av bissektriser till ABCD:s vinklar bildad fyr-*

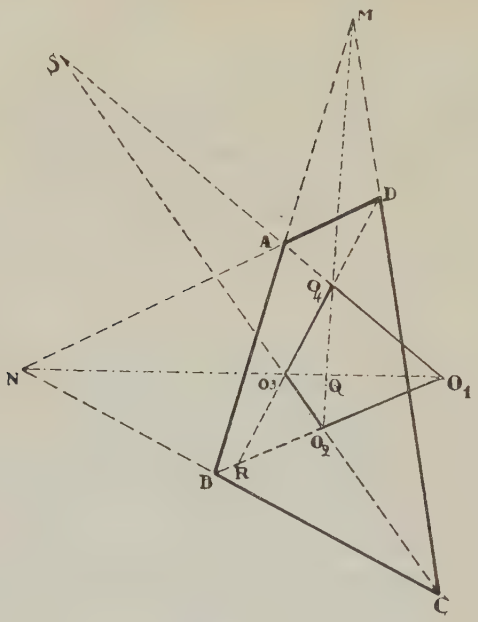


Fig. 1.

hörning, i vilken varje hörnpunkt är skärningspunkt mellan två närliggande vinklars bissektriser. Enligt denna definition få vi även bissektrisfyrhörningar, om de inre bissektriserna till en eller flera av vinklarna i *ABCD* ersättas med samma vinklars yttre bissektriser. En bissektrisfyrhörning kan således bildas antingen av a) fyra inre bissektriser, b) tre inre och en yttre bissektris, c) två inre och två yttre bissektriser, d) en inre och tre yttre bissektriser eller av e) fyra yttre bissektriser. Det finns alltså i allmänhet sexton $(1+4+6+4+1)$ bissektrisfyrhörningar till *ABCD*. Av dessa äro, såsom förf. påpekat,[1] åtta inskrivbara, näm-

[1] Tidskrift för elem. matem., fysik och kemi, årg. 4, häft. 2, sid. 125. Vi vilja i det följande vid hänvisning till dessa satser om bissektrisfyrhörningarna använda beteckningen »bissektrissatserna».

ligen de, som bildas av bissektriserna a), c) och e). Två av de inskrivbara bissektrisfyrhörningarna äro konvexa, nämligen de, som bildas av bissektriserna a) och e). En fyrhörning *ABCD* med ett inåtgående hörn eller med två varandra skärande sidor har likaledes i allmänhet sexton bissektrisfyrhörningar, av vilka åtta äro inskrivbara.[1]

För inskrivbara bissektrisfyrhörningar gäller följande sats, vilkens riktighet genast inses: En inskrivbar bissektrisfyrhörnings hörnpunkter ligga alltid två och två på bissektriser till de vinklar (*ANB* och *AMD* i fig. 1), som bildas av den givna fyrhörningens motstående sidor. Sistnämnda bissektriser äro diagonaler i bissektrisfyrhörningen.

Är en fyrhörning *ABCD* given, kan man i allmänhet upprita sexton cirklar, var och en tangerande tre av sidornas riktningslinjer. Medelpunkter i dessa cirklar äro bissektrisfyrhörningarnas hörnpunkter. E. Eckhardt[2] har för en inskrivbar, konvex fyrhörning funnit mycket intressanta samband mellan cirklarnas radier. Han använder härvid ovanstående teorem, vilket han samtidigt bevisar. I en uppsats »Die Behandlung der Viereckslehre» har F. Pugehl[3] behandlat de olika typerna av konvexa fyrhörningar och visat, huru de böra indelas efter sina egenskaper. Han angiver även för varje typ den bissektrisfyrhörning, som bildas av vinklarnas inre bissektriser. Utan att meddela något bevis påstår han, att bissektriserna till en inskrivbar fyrhörnings vinklar bilda en inskrivbar fyrhörning, som dessutom är omskrivbar. Att detta påstående i allmänhet ej är sant, påvisades av C. Stengel[4], som fann, att nämnda bissektrisfyrhörning blir omskrivbar endast, om den ursprungliga fyrhörningen är ett likbent parallelltrapets.

Ett mycket intressant uppslag har givits av E. Stucke[5].

[1] Se not å föreg. sida.
[2] Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht, Jahrg. 44, sid. 297 (1913); Jahrg. 46, sid. 236 (1915).
[3] Anf. tidskrift, årg. 48, sid. 49 (1917).
[4] Anf. tidskrift, årg. 49, sid. 213 (1918).
[5] Anf. tidskrift, årg. 50, sid. 92 (1919).

Hans tankegång är följande: En godtycklig konvex fyrhörning A har som bissektrisfyrhörning en konvex, *inskrivbar* fyrhörning B. Denna fyrhörning B har alltså en speciell egenskap, som skiljer den från A. B har i sin tur som bissektrisfyrhörning en konvex fyrhörning C, vilken liksom B är inskrivbar men dessutom har den speciellare egenskapen, att *dess diagonaler äro vinkelräta mot varandra.* En konvex bissektrisfyrhörning till C måste utom dessa egenskaper ha en ännu speciellare. På detta sätt erhåller man en kedja av allt speciellare fyrhörningar. Kan det ej tänkas, att man som länk i denna kedja slutligen erhåller en omskrivbar fyrhörning?

Det är för att finna svaret på denna fråga, vi nu gå att studera egenskaperna hos fyrhörningar och deras inskrivbara bissektrisfyrhörningar. Man skulle kunna tycka, att det lämpligaste vore, att fortsätta på den av Stucke föreslagna vägen och alltså taga reda på den speciella egenskap, som skiljer varje fyrhörning i kedjan från den närmast föregående. Det visar sig emellertid omöjligt att på denna väg komma till något resultat. Vi vilja i stället vid vår undersökning gå en motsatt väg och därför börja med att lösa följande problem:

En inskrivbar fyrhörning är given. Att söka alla fyrhörningar, till vilka den givna fyrhörningen är bissektrisfyrhörning.

§ 2.

Låt $O_1O_2O_3O_4$ vara en i cirkeln O inskriven konvex fyrhörning och inför följande beteckningar på vinklarna:

$$\angle O_2O_1O_3 = \angle O_2O_4O_3 = \alpha, \quad \angle O_3O_1O_4 = \angle O_3O_2O_4 = \beta,$$
$$\angle O_1O_3O_4 = \angle O_1O_2O_4 = \gamma, \quad \angle O_1O_3O_2 = \angle O_1O_4O_2 = \delta.$$

Då är $$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Vi förutsätta i denna paragraf, att fyrhörningens vinklar äro olika och tänka oss dem ordnade efter storlek på följande sätt

$$\alpha+\beta<\alpha+\delta<\beta+\gamma<\gamma+\delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Av (1) och (2) följer, att α, β och δ äro $< \pi/2$. γ kan däremot vara $\lessgtr \pi/2$. Vi särskilja följaktligen tre fall:

I. $\gamma < \pi/2$. *Medelpunkten O ligger då inom fyrhörningen $O_1O_2O_3O_4$.*

I en godtycklig punkt N på diagonalen O_1O_3:s riktningslinje avsätta vi å ömse sidor om denna linje vinklar O_1NA och O_1NB lika med $(\pi/2 - \alpha - \beta)$. Vinkelbenet NA utdrages, tills det skär O_1O_4:s och O_3O_4:s riktningslinjer i A och D resp., och vinkelbenet NB utdrages, tills det skär O_1O_2:s och O_2O_3:s riktningslinjer i B och C resp. Sammanbindes A med B och C med D, erhålles en fyrhörning $ABCD$, till vilken $O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisfyrhörning.

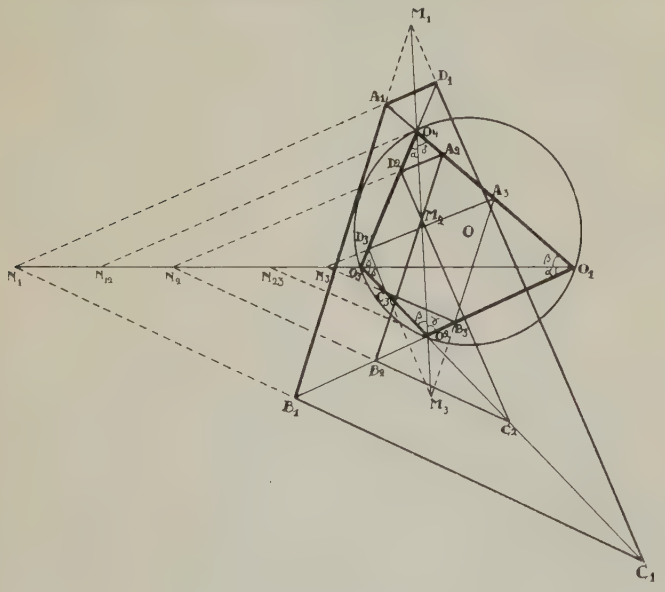


Fig. 2.

Beviset utföra vi för det fall, att N har läget N_1 (fig. 2). För andra lägen av N blir beviset alldeles analogt. Eftersom N_1O_1 är bissektris till $\angle A_1N_1B_1$ och $\angle A_1O_1B_1 =$

$= \pi/2 - 1/2 \angle A_1N_1B_1$, är O_1 medelpunkt till en triangeln $A_1N_1B_1$ vidskriven cirkel.

$$\because \angle O_1A_1B_1 = \angle O_1A_1D_1 = \angle A_1N_1O_1 + \angle A_1O_1N_1 = \pi/2 - \alpha$$

och $\angle O_1B_1A_1 = \angle O_1B_1C_1 = \angle B_1N_1O_1 + \angle B_1O_1N_1 = \pi/2 - \beta$.

Vidare är enligt (1) $\angle D_1O_3C_1 = \pi/2 + 1/2 \angle D_1N_1C_1$, varav följer, att O_3 är medelpunkt till den i triangeln $D_1N_1C_1$ inskrivna cirkeln.

$$\because \angle O_3C_1D_1 = \angle O_3C_1B_1 = \angle O_1O_3C_1 - \angle O_3N_1C_1 = \pi/2 - \gamma$$

och $\angle O_3D_1C_1 = \angle O_3D_1A_1 = \angle O_1O_3D_1 - \angle O_3N_1D_1 = \pi/2 - \delta$.

$O_1O_2O_3O_4$ är alltså en bissektrisfyrhörning till $A_1B_1C_1D_1$. Vinklarna i den senare fyrhörningen äro $A_1 = \pi - 2\alpha$, $B_1 = \pi - 2\beta$, $C_1 = \pi - 2\gamma$ och $D_1 = \pi - 2\delta$.

Skärningspunkten M_1 mellan förlängningarna av sidorna B_1A_1 och C_1D_1 måste enligt satsen sid. 3 ligga på diagonalen O_2O_4:s riktningslinje (detta följer även av Desargues' sats tillämpad på trianglarna $B_1C_1O_2$ och $A_1D_1O_4$), och denna är bissektris till vinkeln $B_1M_1C_1$. Vinklarna $B_1M_1O_4$ och $C_1M_1O_4$ äro vardera lika med $(\pi/2 - \alpha - \delta)$. Samma fyrhörningar $ABCD$ erhållas alltså, om vi från punkter M på diagonalen O_2O_4:s riktningslinje å ömse sidor om denna linje avsätta vinklar lika med $(\pi/2 - \alpha - \delta)$.

Enligt (1) är

$$\pi/2 - \alpha - \beta = \gamma - (\pi/2 - \delta) = \delta - (\pi/2 - \gamma).$$

Då nu $\delta < \pi/2$ och $\gamma < \pi/2$, blir $\pi/2 - \alpha - \beta < \gamma$ och $\pi/2 - \alpha - \beta < \delta$. Punkterna D och C ligga alltså på olika sidor om O_1O_3:s riktningslinje. Detsamma gäller om punkterna A och B. De motstående sidorna AD och BC måste följaktligen båda gå genom N, eller också ligger N på bådas förlängningar. Ett liknande resultat erhålles för skärningspunkten M och sidorna AB och CD. Härav följer, att *alla fyrhörningarna $ABCD$ måste antingen vara konvexa eller ha två varandra skärande sidor.*

Vi låta nu N röra sig utmed O_1O_3:s riktningslinje. Fyrhörningen $ABCD$ ändrar därvid utseende. Av fig. 3 framgår, att $ABCD$ för fyra olika lägen av N övergår i en

triangel. Detta inträffar, då två av fyrhörningens hörnpunkter sammanfalla med en hörnpunkt i $O_1O_2O_3O_4$.

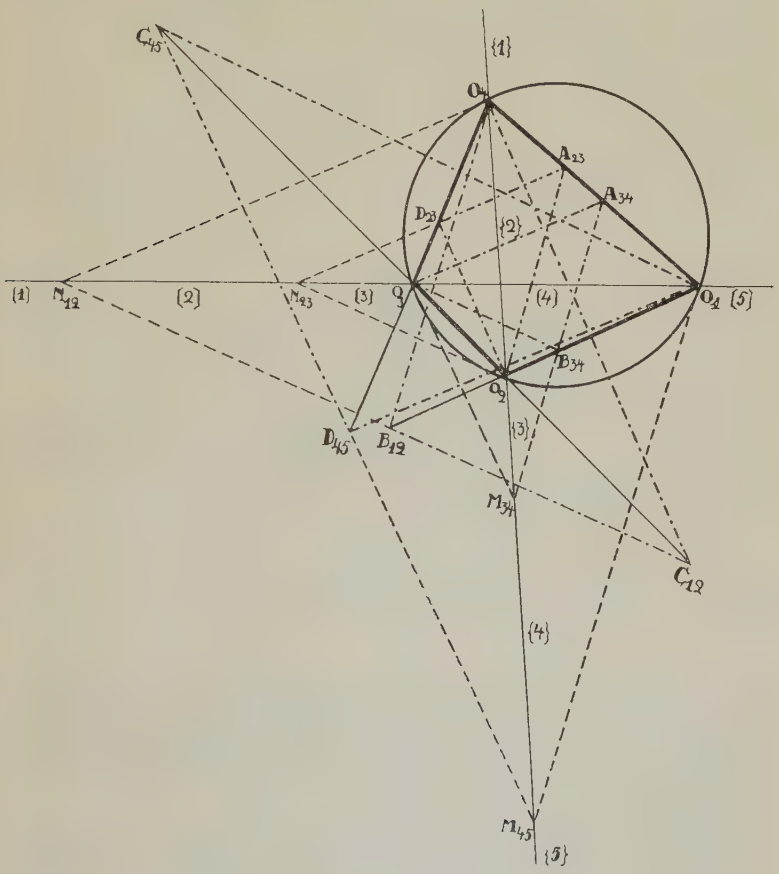


Fig. 3.

Bissektriser till triangelns vinklar äro två sidor och en diagonal i $O_1O_2O_3O_4$. Trianglarna kunna således ej betraktas som lösningar till problemet. De mot trianglarna svarande punkterna N, nämligen[1] $N_{12}(O_4N_{12} \parallel A_1N_1)$, $N_{23}(O_2N_{23} \parallel B_1N_1)$, O_3 och O_1 dela O_1O_3:s riktningslinje i fem

[1] Eftersom $\angle O_1O_4O_3 < \angle O_1O_2O_3$, är $N_{12}O_3 > N_{23}O_3$.

områden, i fig. 3 betecknade med [1], [2], [3], [4] och [5]. Längs O_2O_4:s riktningslinje erhålles samtidigt en motsvarande indelning för punkten M, nämligen områdena $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ och $\{5\}$. Dessa ha numrerats så, att M faller inom $\{1\}$, då N ligger inom [1], M faller inom $\{2\}$, då N ligger inom [2], o. s. v. Numreringen blir emellertid motsatt den, som använts för områdena längs O_1O_3:s riktningslinje. Om vi nämligen vid konstruktionen tagit N på diagonalen O_2O_4:s riktningslinje, skulle $\{1\}$ ha betecknats med [5], $\{2\}$ med [4] o. s. v. Härav följer, att de fyrhörningar $A_5B_5C_5D_5$, som erhållas, då N ligger inom [5], måste ha samma utseende som $A_1B_1C_1D_1$. Av samma skäl måste fyrhörningarna $A_4B_4C_4D_4$ överensstämma med $A_2B_2C_2D_2$. Det finns alltså endast tre olika typer av fyrhörningar $ABCD$. Vi sammanfatta resultaten i följande sats:

Ligger den omskrivna cirkelns medelpunkt inom $O_1O_2O_3O_4$, finnas oändligt många fyrhörningar $ABCD$, till vilka $O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisfyrhörning. De kunna indelas i tre olika grupper, nämligen

a) *konvexa fyrhörningar $A_1B_1C_1D_1$ ($A_5B_5C_5D_5$). De inre bissektriserna till vinklarna bilda $O_1O_2O_3O_4$. Vinklarna äro $A=\pi-2\alpha$, $B=\pi-2\beta$, $C=\pi-2\gamma$ och $D=\pi-2\delta$* (jfr »bissektrissats» I a).

b) *fyrhörningar $A_2B_2C_2D_2$ ($A_4B_4C_4D_4$) med två varandra skärande sidor. De inre bissektriserna till två närliggande vinklar, båda i samma triangel, bilda tillsammans med de andra vinklarnas yttre bissektriser $O_1O_2O_3O_4$* (jfr »bissektrissats» III d').

c) *konvexa fyrhörningar $A_3B_3C_3D_3$. De yttre bissektriserna till vinklarna bilda $O_1O_2O_3O_4$. Vinklarna äro $A=2\alpha$, $B=2\beta$, $C=2\gamma$ och $D=2\delta$* (jfr »bissektrissats» I b).

II. $\gamma > \pi/2$. *Medelpunkten O ligger då utanför fyrhörningen $O_1O_2O_3O_4$.*

Samma metod, som använts i I, ger oss för varje punkt N på O_1O_3:s riktningslinje (med undantag för punkterna N_{12}, O_3, N_{34} och O_1) en fyrhörning $ABCD$. Att

$O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisfyrhörning till $ABCD$, bevisa vi för det fall, att N har läget N_1 (fig. 4). Även nu är O_1 medelpunkt till en triangeln $A_1N_1B_1$ vidskriven cirkel, varav följer, att O_1O_4:s och O_1O_2:s riktningslinjer äro bissektriser, den förra till vinkeln A_1, den senare till yttervinkeln vid B_1. Vidare är

$$\sphericalangle C_1O_3D_1 = \sphericalangle O_2O_1O_4 = {}^{\pi}/_{2} - \sphericalangle D_1N_1O_3.$$

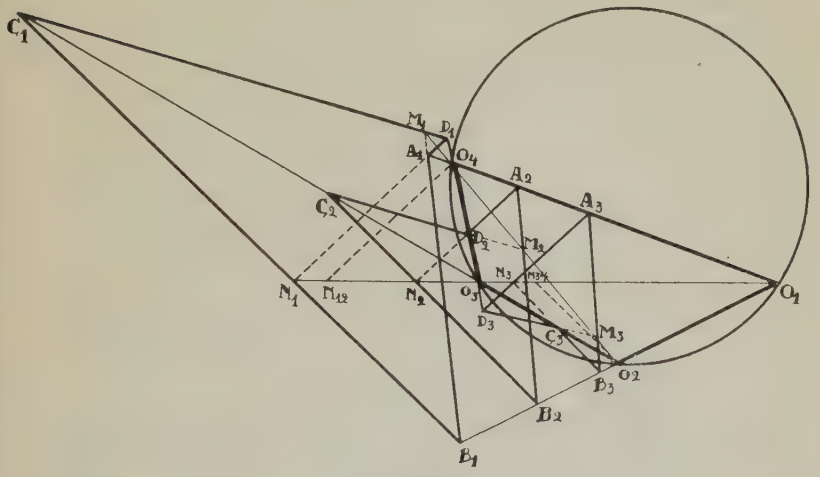


Fig. 4.

Då dessutom $\sphericalangle B_1N_1O_3 = \sphericalangle D_1N_1O_3$, måste enligt bekanta satser om bissektriserna till en triangels vinklar O_3 vara medelpunkt till en triangeln $C_1N_1D_1$ vidskriven cirkel. Härav följer, att O_2O_3:s riktningslinje är bissektris till vinkeln C_1, och att O_3O_4:s riktningslinje är bissektris till yttre vinkeln vid D_1. $O_1O_2O_3O_4$ är alltså bissektrisfyrhörning till $A_1B_1C_1D_1$.

Enligt (1) är

$${}^{\pi}/_{2} - \alpha - \beta = \gamma - ({}^{\pi}/_{2} - \delta) = \delta + (\gamma - {}^{\pi}/_{2}).$$

Då nu $\delta < {}^{\pi}/_{2}$ men $\gamma > {}^{\pi}/_{2}$, blir ${}^{\pi}/_{2} - \alpha - \beta < \gamma$ men ${}^{\pi}/_{2} - \alpha - \beta > \delta$. Punkterna C och D ligga alltså på samma sida om O_1O_3:s riktningslinje, under det att A och B ligga på olika sidor om denna linje. Härav följer, att N måste

ligga på den ena av sidorna AD och BC men på förlängningen av den andra. Ett liknande resultat erhålles för punkten M och de båda sidorna AB och CD. *Alla fyrhörningarna $ABCD$ måste alltså ha ett inåtgående hörn.*

De förändringar, $ABCD$ undergår, då N rör sig utmed O_1O_3:s riktningslinje, äro analoga med dem, vi funnit för $\gamma < \pi/2$. Vi kunna därför genast giva följande sammanfattning av resultaten:

Ligger den omskrivna cirkelns medelpunkt utanför $O_1O_2O_3O_4$, finnas oändligt många fyrhörningar $ABCD$, till vilka $O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisfyrhörning. Alla ha ett inåtgående hörn. De kunna indelas i tre grupper, nämligen

a) *fyrhörningar $A_1B_1C_1D_1$ ($A_5B_5C_5D_5$). De inre bissektriserna till två motstående vinklar, en av dem större än 180°, bilda tillsammans med de andra vinklarnas yttre bissektriser fyrhörningen $O_1O_2O_3O_4$* (jfr »bissektrissats» II c').

b) *fyrhörningar $A_2B_2C_2D_2$ ($A_4B_4C_4D_4$). De inre bissektriserna till två närliggande vinklar, en av dem större än 180°, bilda tillsammans med de andras yttre bissektriser fyrhörningen $O_1O_2O_3O_4$* (jfr »bissektrissats» II d').

c) *fyrhörningar $A_3B_3C_3D_3$. De yttre bissektriserna till vinklarna bilda fyrhörningen $O_1O_2O_3O_4$. Vinklarna äro $A=2\alpha$, $B=2\beta$, $C=2\gamma$ och $D=2\delta$* (jfr »bissektrissats II *b*).

III. $\gamma=\pi/2$. *Medelpunkten O ligger på en av fyrhörningens sidor.*

Enligt (1) är detta fall $\pi/2-\alpha-\beta=\delta$ och $\pi/2-\alpha-\delta=\beta$. Användes samma metod som i I, bliva alltså både BC och DC parallella med O_3O_2. Punkten C ligger på oändligt avstånd. I fig. 5 äro fyrhörningar $ABCD$ uppritade för olika lägen av N. De äro inga fyrhörningar i vanlig mening. *Ligger medelpunkten O på en av sidorna i $O_1O_2O_3O_4$, finnes ingen fyrhörning, till vilken $O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisfyrhörning.* Man kan lätt bevisa, att O_3O_2 går på samma avstånd från linjerna BC och DC. Då nu O_3O_2:s riktningslinje skall vara bissektris till vinkeln C, kunna vi alltså som bissektris till en vinkel, vars spets ligger på oändligt

avstånd, betrakta den linje, som är parallell med vinkelbenen och går på samma avstånd från dem.

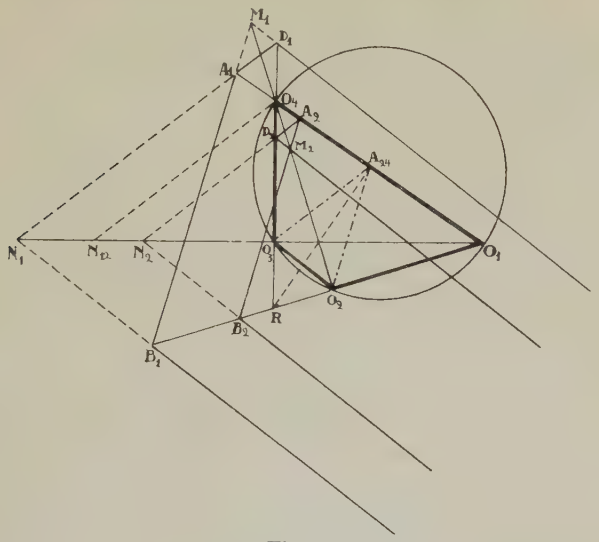


Fig. 5.

För $\gamma = \pi/2$ sammanfalla två av de i I omnämnda trianglarna till en, i fig. 5 betecknad med $O_2O_3A_{24}$. Bissektristriangel till $O_2O_3A_{24}$ är tydligen triangeln O_1O_4R, som bildas, då O_4O_3 och O_1O_2 utdragas, tills de råkas i R. Nu finns det, som bekant, endast en triangel, till vilken en given triangel är bissektristriangel, och den fås, då höjdernas fotpunkter sammanbindas. Av fig. 5 framgår också, att O_2, O_3 och A_{24} äro fotpunkter till höjderna i triangeln O_1O_4R.

Att vi medelst den använda metoden erhållit *alla* fyrhörningar, till vilka $O_1O_2O_3O_4$ är bissektrisfyrhörning, följer av den å sid. 3 omnämnda satsen. Enligt denna äro O_1O_3:s, O_1O_2:s och O_1O_4:s riktningslinjer bissektriser till vinklarna i triangeln NBA. Eftersom alla tre vinklarna $O_2O_1O_3$, $O_4O_1O_3$ och $O_2O_1O_4$ äro spetsiga, måste O_1 alltid vara medelpunkt till den vidskrivna cirkel, som tangerar sidan AB, d. v. s. vinkeln ANB är alltid $2(\pi/2 - \alpha - \beta)$.

§ 3.

Vi ha hittills förutsatt, att vinklarna i $O_1O_2O_3O_4$ äro olika, och skola nu se till, huruvida metoden undergår någon förändring, om fyrhörningen har lika vinklar, d. v. s. om ett eller flera av olikhetstecknen i (2) ersättas med likhetstecken. Tre fall äro möjliga:

a) *Två närliggande vinklar* ($O_2O_1O_4$ och $O_1O_4O_3$) *äro lika.* Då är $\beta = \delta$, $O_1O_4 \parallel O_2O_3$, och *fyrhörningen* $O_1O_2O_3O_4$ *är ett likbent parallelltrapets.* Metoden i § 2 kan användas och ger för $\gamma \gtrless \pi/2$ fyrhörningar $ABCD$, tillhörande de tre grupperna. Av $\beta = \delta$ följer, att *fyrhörningarna* $A_1B_1C_1D_1$ *och* $A_3B_3C_3D_3$ *ha ett par motstående vinklar lika.*

b) *Två motstående vinklar* ($O_1O_4O_3$ och $O_1O_2O_3$) *äro lika.*

$$\because \alpha + \delta = \beta + \gamma = \pi/2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

och $\gamma < \pi/2$. Användas de i fig. 2 införda beteckningarna, blir nu

$$\bigwedge O_3O_4N_{12} = \gamma - (\pi/2 - \alpha - \beta) = \pi/2 - \delta = \alpha = \bigwedge O_3O_4O_2$$

och $\bigwedge O_3O_2N_{23} = \delta - (\pi/2 - \alpha - \beta) = \pi/2 - \gamma = \beta = \bigwedge O_3O_2O_4$.

Härav inses, att punkterna N_{12} och N_{23} sammanfalla till en, i fig. 6 betecknad med N_{13}.

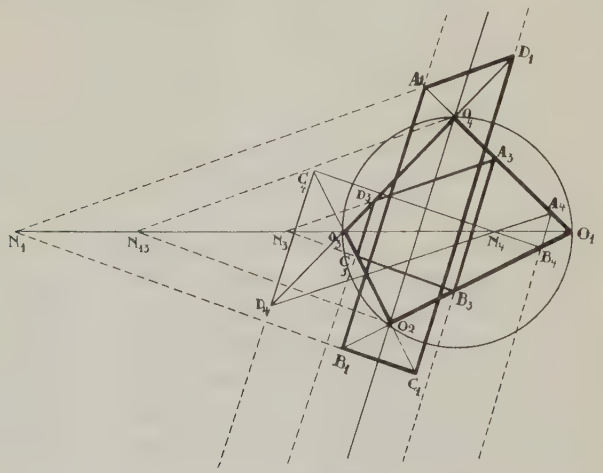


Fig. 6.

Vi kunna även nu använda metoden i § 2 och erhålla fyrhörningar $A_1B_1C_1D_1$, $A_3B_3C_3D_3$ och $A_4B_4C_4D_4$ (fig. 6). Enligt likställighetsläran blir $AB \parallel O_4O_2 \parallel DC$ (O_1 och O_3 tagas till likställighetspunkter). Vidare bilda enligt (3) de från O_4 utgående strålarna O_4N_{13}, O_4O_2, O_4O_3 och O_4O_1 ett harmoniskt knippe, och således halveras AD av O_2O_4:s riktningslinje. *Fyrhörningarna ABCD äro parallelltrapets, vilkas medellinjer sammanfalla med O_2O_4:s riktningslinje.*

Vid konstruktionen av fyrhörningarna $ABCD$ utgingo vi, liksom i § 2, från punkter N. Att i stället utgå från punkter M, synes i nu föreliggande fall omöjligt. Enligt (3) är nämligen

$$\pi/_2 - \alpha - \delta = 0.$$

Resultatet ovan visar, att denna likhet bör tolkas så, att vinkelspetsarna M ligga på oändligt avstånd, och att vinkelbenen äro parallella med O_2O_4. Eftersom O_2O_4:s riktningslinje skall vara bissektris till vinkeln M, måste vidare, enligt vad som redan framhölls i § 2, de båda vinkelbenen gå på samma avstånd från O_2O_4. Metoden i § 2 blir genom en sådan tolkning av likheten $\pi/_2 - \alpha - \delta = 0$ fullt generell.

c) Alla vinklar i $O_1O_2O_3O_4$ äro lika. $O_1O_2O_3O_4$ är en rektangel.

Då nu $\pi/_2 - \alpha - \beta = 0$ och $\pi/_2 - \alpha - \delta = 0$, ligga alla punkter N och M på oändligt avstånd. $ABCD$ erhålles (fig. 7) genom att draga linjer NA och NB parallella med och på samma avstånd från O_3O_1. Då blir $AB \parallel O_4O_2 \parallel DC$. *Fyrhörningarna ABCD äro alltså parallellogrammer med sidorna parallella med diagonalerna O_1O_3 och O_2O_4.*

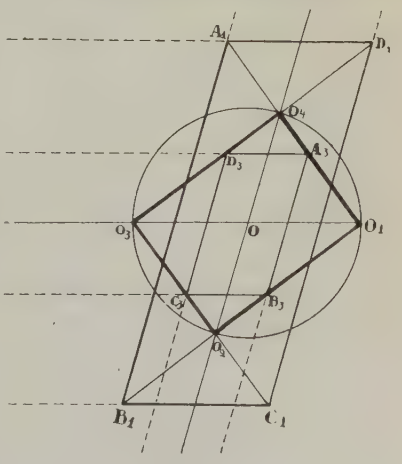


Fig. 7.

*

Behandlingen av det i § 1 uppställda problemet är härmed avslutad. Innan vi lämna detsamma, vilja vi emellertid göra ett påpekande angående den givna fyrhörningen $O_1O_2O_3O_4$. Denna antogs vara konvex. Av en konvex fyrhörning $O_1O_2O_3O_4$ erhålles tvenne andra $O_1O_4O_2O_3$ och $O_1O_3O_4O_2$ med skärande sidor. Även dessa äro nu inskrivbara och kunna alltså (se »bissektrissatserna») vara bissektrisfyrhörningar till andra fyrhörningar. Såsom av fig. 2 och 4 framgår, ger oss metoden i § 2 samtidigt med fyrhörningar $ABCD$ även fyrhörningar $AMCN$ och $BMDN$, till vilka $O_1O_4O_2O_3$ och $O_1O_3O_4O_2$ resp. äro bissektrisfyrhörningar. I nedanstående tabell äro alla de erhållna fyrhörningarna sammanförda jämte sina bissektrisfyrhörningar. Motsvarande »bissektrissats» är också angiven.

$\gamma < \pi/2$			$\gamma > \pi/2$		
Fyrhörning	Bissektrisfyrhörning	»Bissektrissats»	Fyrhörning	Bissektrisfyrhörning	»Bissektrissats»
$A_1B_1C_1D_1$	$O_1O_2O_3O_4$	I a	$A_1B_1C_1D_1$	$O_1O_2O_3O_4$	II c′
$A_2B_2C_2D_2$	»	III d′	$A_2B_2C_2D_2$	»	II d′
$A_3B_3C_3D_3$	»	I b	$A_3B_3C_3D_3$	»	II b
$A_1M_1C_1N_1$	$O_1O_4O_2O_3$	II a	$A_1M_1C_1N_1$	$O_1O_4O_2O_3$	I c
$A_2M_2C_2N_2$	»	II d″	$A_2M_2C_2N_2$	»	III d″
$A_3M_3C_3N_3$	»	II c″	$A_3M_3C_3N_3$	»	I c
$B_1M_1D_1N_1$	$O_1O_3O_4O_2$	III c	$B_1M_1D_1N_1$	$O_1O_3O_4O_2$	III c
$B_2M_2D_2N_2$	»	I d	$B_2M_2D_2N_2$	»	I d
$B_3M_3D_3N_3$	»	III a	$B_3M_3D_3N_3$	»	III b

Av särskilt intresse är, att var och en av »bissektrissatserna» I c, I d och III d i tabellen förekommer på två olika ställen. Detta sammanhänger tydligen därmed, att de vid dessa satser liksom de vid satserna II c, II d och III c erhållna bissektrisfyrhörningarna i verkligheten äro av två olika typer. Olikheten är emellertid ej så framträdande, att den föranleder en uppdelning av satserna i underavdelningar.

Bestämning av ljusets våglängd med gitter.

Av B. BERGGREN.

I andra årg. av denna tidskrift återfinnes en redogörelse för bestämning av våglängder med gittermetoden, avsedd att utföras som lärjungeförsök. Som förf. anmärker medgiver emellertid tiden ej alltid, att detta område av fysiken genomgås. Än mera sällan torde det alltså ges tillfälle till elevlaborationer på detta fält. Dessutom finnes i allmänhet blott ett spektroskop tillgängligt för hela den laborerande avdelningen, och då blir det ej gärna möjligt att låta alla eleverna få utföra försöket. Mera önskvärt synes det mig alltså att äga en metod att objektivt, för hela klassen samtidigt, visa fenomenet och därvid kunna göra åtminstone ungefärliga mätningar. Detta låter sig också göra synnerligen enkelt med ett gitter med få linjer (c:a 20—50 pr mm.), om projektionsapparat finnes att tillgå. En spalt anbringas mellan kondensor och projektionsobjektiv, vilket senare inställes, så att en skarp bild av springan erhålles på vita duken. Gittret placeras nu omedelbart framför objektivet, varvid åtminstone första ordningens båda spektra böra framträda. Uppmätes avstånden dem emellan samt avståndet mellan gittret och duken kan man lätt beräkna $\sin v$ i gitterformeln $\lambda = \alpha \sin v$. Noggrannheten blir visserligen ej så stor men är här ej det väsentliga.

Vill man vid laborationer »in gleicher Front» utföra våglängdsbestämning, kan det ske med ganska enkla medel på ännu ett sätt, vars användbarhet jag prövat vid Landskrona gymnasium för något år tillbaka. Man begagnar

även vid denna metod gitter med få linjer (t. ex. metalltrådsgitter). För varje laborationsgrupp erfordras då a) ett dylikt gitter, b) en spalt belyst av lämplig ljuskälla, c) en skala, d) två vertikala stavar å fot. Som vanligt antages tvenne elever samarbeta. *A* ser genom gittret mot den belysta spalten (från lämpligt avstånd). *B* flyttar de båda stavarna, en på vardera sidan om spalten, så att de för *A* synas sammanfalla med de båda spektra av 1:sta ordningen. Avstånden uppmätas, och beräkningen göres som vid projektionsmetoden. Metoden är tillräckligt noggrann för att här ge det väsentliga.

Om fasregeln och dess tillämpning vid termisk analys.

Av J. ARVID HEDVALL.

Följande uppsats avser att lämna en allmän orientering över den så kallade »*termiska analysens*»[1] arbetssätt. Härmed menas metoden att med tillhjälp av ett upprättat diagram, innehållande ett systems termiska data som funktion av sammansättningen, sluta sig till kvaliteten och i flera fall även kvantiteten av de under upphettningen eller avkylningen inträffade förändringarna. För kännedomen om framför allt legeringarnas egenskaper har denna metod blivit av grundläggande betydelse. I betraktande av den oerhörda roll, som den moderna metallurgien och metallografien spelar för det industriella och praktiska livet, må man väl säga, att kunskapen om ifrågavarande metoder och deras vetenskapliga fundament ej längre bör ligga utanför ramen av kemisk eller fysikalisk bildning. En av de viktigaste förutsättningarna för ett rätt förstående av hithörande problem är förtrogenhet med den s. k. *fasregelns* innebörd och tillämpningar. Den *Gibbs*'ska faslärans europeiske apostel — *Bakhuis Roozeboom* — ansåg sig redan år 1901 vara berättigad att säga: »ich glaube die Zeit gekommen, dass man von jedem gut gebildeten Chemiker Bekanntheit mit den Hauptzügen der Gleichgewichtslehre verlangen darf». Vår akademiska läroboklitteratur äger förutom Roozebooms egen monografi: »*Die Heterogenen Gleichgewichte*» i *Findlays* »*Einführung in die Phasenlehre*»[2]

[1] Metoden infördes av *G. Tammann:* Zeitschr. f. anorg. Chem. *37* (1903), 303.

[2] Ambrosius Barth, Leipzig.

sedan 1907 en utomordentlig, elementär, lättläst framställning av fasregelns tillämpningar. Då denna eller väsentliga delar därav tämligen allmänt torde fordras för högre betyg redan i ämbetsexamen, synes det mig sannolikt att Roozebooms förväntningar nu efter tvenne decennier även här i landet böra vara uppfyllda.

För det stora flertalet kemister och fysici framstår väl fasläran mera som en »regel» än som en egentlig »lära». Jag menar därmed, att dess vanligaste användning består i egenskapen att möjliggöra en systematisk överblick över jämviktsförhållandena i olika system. Det är också uteslutande denna del av fasläran, som vågar göra anspråk på berättigat utrymme i den kemiska och fysikaliska *allmänbildningen.*

Fasregelns rätta användning blir egentligen en ren övning, som måste inläras genom dess tillämpning på ett tillräckligt stort och skiftande exempelmaterial. Det är då också självfallet, att en allmän översikt över fasregelns användbarhet inom så trånga gränser som en tidskriftsuppsats skulle vara tämligen värdelös. En kort överblick över hithörande begreppsbildningar må dock för de tillämpningar, som här skola behandlas, vara på sin plats.

Fasregeln.

De *Wenzel*'ska[1] och *Berthollet*'ska[2] upptäckterna av ofullständigt förlöpande kemiska reaktioner lade grunden till ett nytt forskningsområde: *läran om den kemiska jämvikten.* Genom uppställningen av den s. k. *massverkningslagen* lyckades *Guldberg* och *Waage*[3] erhålla ett uttryck, varur reaktionshastighetens och jämviktens beroende av de reagerande ämnenas koncentration matematiskt kunde beräknas. I sin ursprungliga form gällde lagen emellertid

[1] »Vorlesungen über die chemische Verwandtschaft der Körper» 1777.
[2] »Essai de statique chymique», 1803. Även Ostwalds Klassiker: *74.*
[3] »Etudes sur les affinités chimiques» 1867; på tyska i Journ. f. prakt Chemie 1879, Bd *19*, 69.

endast för reaktioner mellan ämnen i lösning eller mellan gasblandningar. Dylika i såväl fysikaliskt som kemiskt hänseende alltigenom likartade system kallas homogena, och man talar därvid även om *homogena jämvikter*. Och för dessa var det således närmast, som den Guldberg-Waageska lagen hade sin giltighet.

Snart uppdagade emellertid nya undersökningar exempel på reaktioner, där jämvikten föreföll att vara oberoende av koncentrationen. Det klassiska exemplet var studiet av kalciumkarbonatets dissociation. *Debray*[1] lyckades fastställa, att vid upphettning av $CaCO_3$ i slutet rum svarade alltid ett visst CO_2-tryck mot en viss temperatur. Detta oberoende av huru stor del som sönderfallit i CaO och CO_2. Framför allt genom *H. St. Claire Deville* och dennes lärjungar ökades mängden av undersökta dissociationsjämvikter väsentligt. Ett annat exempel på sådana jämvikter i *heterogena system* eller kort och gott *heterogena jämvikter* är vattenavspaltningen från kristallvattenhaltiga salter. Genom att utan vidare antaga den verksamma delen av de i reaktionen deltagande *fasta* ämnena konstant, lyckades Guldberg och Waage bringa även dessa jämvikter inom lagens giltighetsområde. Teoretiskt kunde detta tillägg rättfärdigas genom att med *Nernst*[2] antaga en gasblandning av $CO_2 + CaO$-ånga $+ CaCO_3$-ånga. Därmed har hela reaktionsmekanismen förlagts till det gasformiga aggregationstillståndet, och de vanliga av massverkningslagen betingade ekvationerna gälla:[3]

$$CaCO_3 \rightleftarrows CaO + CO_2,$$

$$\therefore \frac{[CO_2]\,[CaO]}{[CaCO_3]} = k.$$

Men [CaO] och $[CaCO_3]$ kunna givetvis, så länge fast CaO och $CaCO_3$ äro närvarande, anses konstanta, och man får

$$\therefore [CO_2] = k\frac{[CaCO_3]}{[CaO]} = k\frac{k'}{k''} = K.$$

[1] Comptes rendus . . . . . *64*, 603 (1867).
[2] Jfr *Nernst*, Theoretische Chemie, 6 uppl., 609.
[3] Med beteckningssättet [ ] anges som vanligt koncentrationen.

Ett fortsatt studium av de heterogena systemens reaktioner bragte emellertid allt flera fall i dagen, som ökade svårigheten av eller alldeles omöjliggjorde massverkningslagens tillämpning. Denna lag förutsätter nämligen kännedom om arten (kemisk sammansättning) och storleken (association, dissociation) av de reagerande molekylslagen. Utrönandet av ett eller bägge av dessa data erbjöd emellertid och erbjuder än i dag ofta praktiskt oöverstigliga svårigheter.

Det var först amerikanaren *Willard Gibbs*[1], som 1874 lyckades anlägga ett åskådningssätt, som, utan kännedom om de i systemet reagerande molekylslagens art eller komplexitet, tillät ett fullt systematiskt överblickande och beräknande av jämviktsförhållandena i *alla* system. De Gibbska, på termodynamisk väg härledda uttrycken äro generella och äga således tillämplighet även på homogena system och tillåta även kvantitativa beräkningar. Det är emellertid fasregeln eller den del av fasläran, med vars tillhjälp de *heterogena systemens* jämviktsförhållanden låta sig systematiskt överblickas, som kommit till en mera allmän användning.

Gibbs betraktar varje dylikt system såsom uppbyggt av ett visst antal s. k. ***komponenter.***

Som komponenter uppfattar han det minsta möjliga antal beståndsdelar, som behövs för att uppbygga samtliga i jämvikten deltagande ***faser.***

Med fas menas varje i jämvikten delaktigt homogent system. De olika faserna äro således inom det heterogena systemet genom skiljeytor avgränsade från varandra.

I ett heterogent system kunna således endast *en* gasfas, men godtyckligt många flytande (ej blandbara vätskor) och fasta faser (t. ex. varje fast kropp av olika sammansättning eller olika modifikationer av samma fasta ämne) vara närvarande.

Förändringarna i ett heterogent systems jämviktsförhållanden tänker sig Gibbs beroende på tre variabla fak-

[1] På tyska i övers. av Ostwald: Thermodynamische Studien 1892.

torer eller s. k. ***friheter:*** tryck, volym (koncentration) och temperatur.

Allt eftersom en två eller tre av dessa variabler låta sig godtyckligt bestämmas, säges systemet ha en frihetsgrad (F) = 1, 2 eller 3. Gibbs har genom att beräkna detta tals beroende av det i systemet närvarande antalet komponenter (C) och faser (P) kommit fram till fasregelns enkla matematiska formulering:

$$P + F = C + 2, \quad \text{d. v. s.}$$

antalet faser + frihetsgraden är för ett i jämvikt varande system[1] lika med antalet komponenter + 2.

Ett par exempel må förtydliga detta:

Vi veta, att en vätska, t. ex. vatten, vid en viss temperatur har ett bestämt ångtryck. Denna jämvikt äger således rum mellan de båda faserna vatten och vattenånga. Bägge bestå av den kemiska föreningen mellan väte och syre i förhållandet H_2O. Således ha vi blott en komponent — vatten.[2] Formeln

$$P + F = C + 2$$
$$2 + n = 1 + 2, \text{ varav } n = 1,$$

visar att vi godtyckligt förfoga över en frihet, d. v. s. systemet är *univariant* och i s. k. »*fullständig jämvikt*»[3]. Om vi bestämma oss för en viss temperatur, så svarar däremot alltid ett visst ångtryck och vice versa. Detta förhållande åskådliggöres genom vanliga ångtryckskurvor. Om systemet avkyles tillräckligt, uppträder en tredje fas — is — av samma kemiska sammansättning. Vi få således:

$$P + F = C + 2$$
$$3 + n = 1 + 2, \text{ d. v. s. } n = 0.$$

[1] För att jämvikt i ett *heterogent* system skall äga rum fordras naturligtvis, att det råder jämvikt även i de olika fasernas *homogena* system.

[2] Väte och syre kunna här ej ifrågakomma. Naturligtvis kunna de bägge faserna uppbyggas härav, men beståndsdelarnas antal skall enligt def. vara ***så litet som möjligt.***

[3] Om t. ex. temperaturen hos ett i fullständig jämvikt varande system varaktigt ändras, så försvinner en av faserna helt och hållet.

Systemet är således *nonvariant*, vilket betyder att ånga, vatten och is kunna *koexistera* endast vid en bestämd temperatur (+0,0076°) och ett bestämt tryck (vattenånga av 4,6 mm).

Fullkomligt analogt kunna t. ex. dissociationsjämvikterna:

$$CaCO_3 \rightleftarrows CaO + CO_2 \quad \text{och}$$

$$CuSO_4 \cdot 5aq \rightleftarrows CuSO_4 \cdot 3aq + 2\,H_2O$$

behandlas. I sista fallet äro tydligen komponenterna $CuSO_4$ och H_2O, $\therefore C=2$. Faserna utgöras av de båda fasta ämnena $CuSO_4 \cdot 5aq$ och $CuSO_4 \cdot 3aq$ samt gasfasen vattenånga. Vi få således:

$$P+F=C+2$$

$$3+n=2+2, \text{ varav } n=1.$$

Det vill säga, att mot en viss, godtyckligt vald temperatur svarar ett visst ångtryck. Bestämmes återigen ångtrycket godtyckligt, t. ex. till en atmosfär, så betyder det, att systemet kan vara i jämvikt vid detta tryck vid en enda bestämd temperatur. Detta vill med andra ord säga, att överföringen av pentahydrat till trihydrat i öppet kärl sker vid konstant temperatur så länge, som de båda ifrågavarande hydraten finnas närvarande. Först sedan allt pentahydrat försvunnit stiger temperaturen åter, och nästa hållpunkt inträffar vid överföringen från trihydrat till monohydrat.

Vi betrakta ett annat system: en utspädd lösning av salt i vatten i evakuerat kärl. Komponenterna äro här NaCl och H_2O; faserna äro lösning och ånga. Vi få då:

$$P+F=C+2$$

$$2+n=2+2, \text{ varav } n=2.$$

Det betyder, att även om vi godtyckligt bestämma en viss temperatur, så kan systemet vara i jämvikt vid olika ångtryck. Detta är även lätt att inse, ty först sedan också koncentrationen (friheten n:r 2) fastslagits, svarar mot en viss temperatur alltid ett bestämt ångtryck. Antag, att vi

genom att lyfta upp en lufttätt slutande kolv öka volymen ovanför lösningen och samtidigt hålla temperaturen konstant. Då måste en viss mängd vätska avdunsta, och detta försiggår så länge, tills den nu *mera* koncentrerade lösningen kommit i jämvikt med ångan. Fortsättes volymökningen uppnås slutligen en sådan koncentration, att lösningen vid ifrågavarande temperatur är mättad. Då utfaller salt. Från och med denna punkt medför en ytterligare volymsökning ingen tryckändring. Vätskans avdunstning ändrar ej lösningens koncentration, emedan en motsvarande mängd salt utfaller. Systemet har kommit i univariant jämvikt:

$$P+F=C+2$$
$$3+n=2+2, \text{ således } n=1.$$

Mot en given temperatur svarar alltid en bestämd koncentration (mättad lösning) och ett bestämt ångtryck.

Man brukar för att lättare kunna överblicka förhållandena i system, som bestå av mer än en komponent, sammanställa diagram, som visa olika sammansatta smältors eller lösningars kristallisationstemperaturer, s. k. smältdiagram. För system av flera än två komponenter bliva dessa i allmänhet rätt komplicerade och kräva en framställning i tre dimensioner. Vi inskränka oss i det följande till tvåkomponentiga system.

Några enkla diagramtyper.

Antag, att två ämnen A och B (t. ex. vatten och koksalt), som ej bilda föreningar eller fasta lösningar[1] med varandra, äro i flytande tillstånd blandbara i alla förhållanden. Om lösningen (smältan) innehåller A i överskott (Ab), kan B betraktas som löst i A och vice versa (Ba). Med tillhjälp av fig. 1 och fig. 2 och med stöd av föregående be-

[1] Med anledning av de ännu oklara resultaten av undersökningar över ev. skillnader mellan *fasta lösningar* och *isomorfa blandkristaller* ha i det följande dessa benämningar använts i samma betydelse.

handling är det enkelt att avgöra huru dylika system förhålla sig vid avkylning.

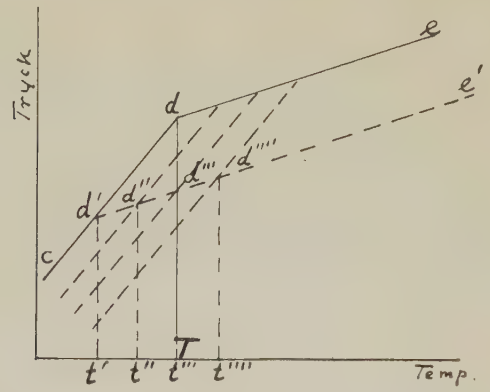


Fig. 1.

Låt *cd* vara ångtryckskurvan för t. ex. *A* i fast och *de* i smält tillstånd. Knickpunkten *d* svarar mot temperaturen $T°$, som således är smältpunkten för *A*. Lösa vi

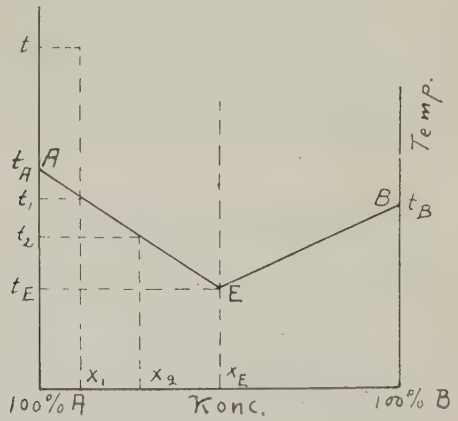


Fig. 2.

nu *B* i *A*, så nedsättes som bekant ångtrycket och kurvan för lösningen (smältan) *Ab* blir i stället *d'e'*. Denna skär

cd (obs.! *A* och *B* ge enligt antagandet ej fasta lösningar) i punkten *d'* och först vid den häremot svarande *lägre* temperaturen $t'°$ kommer *A* att utkristallisera ur *Ab*. Ju mer *B* som upplöses i *A* desto lägre blir denna temperatur, vilket lätt framgår ur figuren. Fullt analoga äro förhållandena naturligtvis för *Ba*-system. I diagrammet (fig. 2) är den temperatur, som svarar mot lösningsmedlets utkristalliserande, avsatt som funktion av smältans koncentration (smältkurva).

Kurvan *AE* betyder således ifrågavarande temperaturer för alla *Ab*-smältor och på samma sätt svarar *BE* mot *Ba*-smältorna (t_A och t_B betyda smältpunkterna för rent *A* och *B*). Dessa båda kurvor skära varandra i *E*. Om en *Ab*-smälta av sammansättningen x_1 avkyles från temperaturen $t°$, så börjar utkristalliseringen av *A* vid $t_1°$. Därvid är alltså en smälta i jämvikt med *A*-kristaller och ånga, således 3 faser. Enligt

$$P+F=C+2$$

$$3+n=2+2$$

är $n=1$ och således är systemet univariant. Därigenom att *A* utskiljes blir den kvarvarande smältans *B*-koncentration större — t. ex. x_2 efter viss tid — och temperaturen för utskiljande av *A* ($t_2°$) måste då enligt fig. 1 ha sjunkit. För *Ab*-smältor fortsätter således *A*-utskiljandet till skärningspunkten *E*, där även *B* utskiljes, eftersom den ligger på kurvan *BE*, som åskådliggör komponenten *B*:s utskiljande ur *Ba*-smältor av olika koncentration. Systemet blir i denna punkt ej längre trefasigt, alldenstund både *A* och *B* förekomma i jämvikt med smältan och ångan. Vi få

$$P+F=C+2$$

$$4+n=2+2 \quad \because\ n=0 \text{ och systemet nonvariant.}$$

Nu kan man emellertid i praktiska fall bortse från ångfasen, emedan trycket på grund av smältning i öppet kärl

bestämts till en atmosfär.[1] Detta betyder, att en smälta av en viss för systemet karaktäristisk koncentration befinner sig i jämvikt med en procentiskt lika sammansatt blandning av de båda komponenterna i fast form. Punkten E kallas *den eutektiska punkten*, och denna är på grund av tryckets ringa inflytande på smältkurvorna praktiskt taget oberoende av trycket. Den motsvarande koncentrationen x_E, och temperaturen t_E° benämnas *eutektisk koncentration* och *eutektisk temperatur. Denna temperatur är den lägsta vid vilken en smälta av de i eutektikum förefintliga ämnena kan erhållas.*

Något mera komplicerat blir diagrammet för det fall att *en eller flera föreningar uppträda* i systemet, som fortfarande antages fritt från fasta lösningar och olika flytande faser. Om *en* förening A_mB_n existerar, så är det klart, att denna också i smältan måste spela rollen av lösningsmedel på samma sätt som förut A och B. Man erhåller således (fig. 3)[2] fyra smältkurvor: A_mB_n i A (AE_1); A i

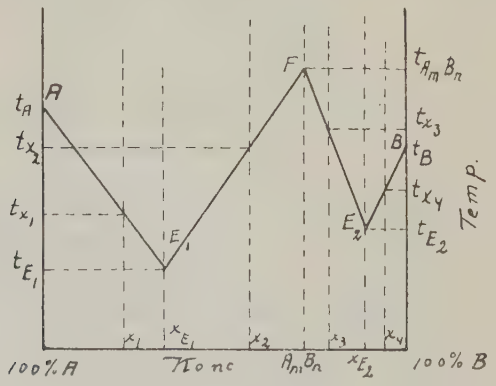


Fig. 3.

A_mB_n (FE_1); B i A_mB_n (FE_2) och A_mB_n i B (BE_2). Diagrammet kan således betraktas sammansatt av två delar, som båda i alla avseenden äro av samma typ som fig. 2. En smälta av sammansättningen x_1 utskiljer vid avkylning

[1] Jämvikten *fast fas—smälta* blir då naturligtvis egentligen bivariant, men förhåller sig på grund av att trycket bestämts såsom univariant.

[2] Det förutsätter här, att föreningen är smältbar utan sönderdelning.

från och med $t^{\circ}_{x_1}$ rent A och stelnar slutligen vid $t^{\circ}_{E_1}$ fullständigt till ett eutektikum av sammansättningen

$$x_{E_1}(A+A_mB_n).$$

Samma eutektikum ges av en smälta x_2 vid samma temperatur sedan den inom temperaturområdet $t^{\circ}_{x_2} - t^{\circ}_{E_1}$ utskilt A_mB_n. I överensstämmelse härmed utskiljer en smälta — sammansatt x_3 — föreningen A_mB_n, tills den vid $t^{\circ}_{E_2}$ stelnar fullständigt till den eutektiska blandningen $x_{E_2}(B+A_mB_n)$. En smälta av koncentrationen x_4 utskiljer rent B mellan $t^{\circ}_{x_4}$ och $t^{\circ}_{E_2}$ och ger sedan vid den sistnämnda temperaturen samma eutektikum. Smältor, som bestå av rent A, B eller A_mB_n eller dessa ämnen blandade i eutektiska proportioner (x_{E_1} och x_{E_2}), stelna på en gång fullständigt vid respektive temperaturer: t_A°; t_B°; $t^{\circ}_{A_mB_n}$; $t^{\circ}_{E_1}$ och $t^{\circ}_{E_2}$. På fullt analogt sätt behandlas system, där flera föreningar uppträda.

Innan vi övergå till diagrammens konstruktion på grund av gjorda mätningar skall i största korthet fallet *fasta lösningar* behandlas. För enkelhetens skull antaga vi *systemet fritt från föreningar och med fullständig blandbarhet såväl i flytande som fast form.* Det är tydligt, att i ett dylikt system två faser av variabel sammansättning — flytande och fast lösning — deltaga i jämvikten. Vi kunna då åter betjäna oss av fig. 1. De med *cd* parallella linjerna representera de mot mer eller mindre koncentrerade fasta *Ab*-lösningar svarande ångtrycken. Allt eftersom dessa kurvor skära den fasta ångtryckskurvan $d'\,e'\,i\,d''\,d'''$ eller d'''' ligger smältans stelningspunkt[1] under, på samma ställe som eller över lösningsmedlets fryspunkt. Enklast vore nu att antaga, att vid smältning av en blandkristall smältan bleve av samma koncentration. Försök visa att så ej är fallet. Smälttemperaturen stiger under smältningens fortgång. Därav följer nu, dels att den smälta, som är i jämvikt med blandkristallen, ej kan vara av dennas sammansättning och dels att de båda lösningarnas (fast och flytande) koncen-

[1] Med stelningspunkt menas den temperatur där blandkristallen *börjar* att utskiljas. Med smältpunkt menas den temperatur, där blandkristallen *börjar* smälta.

tration ändras under upphettningen. Detta kan i det enklaste fallet framställas genom diagrammet fig. 4, där *L*-kurvan åskådliggör den flytande, *S*-kurvan[1] den fasta lösningens sammansättning. Om en smälta av t. ex. konc. x_1 avkyles, så börjar utskiljandet av blandkristaller vid *a* d. v. s. temperaturen $t^{\circ}_{x_1}$. Dessa ha emellertid en annan sammansättning nämligen x_1'. Därigenom ökas den relativa halten av *A* i smältan, d. v. s. stelningstempera-

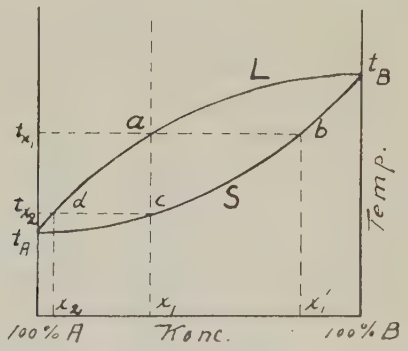


Fig. 4.

turen för den kvarvarande smältan förskjutes nedåt utefter *ad*. Samtidigt varierar den fasta lösningens sammansättning utefter *bc*. I *c*, d. v. s. vid temperaturen $t^{\circ}_{x_2}$ omsätter sig den sista kvarvarande smältan av koncentrationen x_2 med den i jämförelse med x_1 något *B*-rikare fasta lösningen, så att allt stelnar till en blandkristall av sammansättningen x_1. Detta ideella förhållande under avkylningen uppnås i praktiken egentligen aldrig, beroende på att diffusionen i den fasta lösningen är för långsam för att möjliggöra en snabb, kontinuerlig förändring hos denna fas. Det vanliga är därför, att man får en hel rad olika blandkristaller och att den sista återstoden av smältan stelnar först vid en lägre temperatur än den skulle.

Med de förändringar i diagrammen, som äro en följd av uppkomsten av: *mer än en flytande fas, föreningarnas*

[1] Kurvorna benämnas vanligen liquidus — och soliduskurva.

sönderdelning under deras smältpunkt, uppträdandet av *blandkristaller med smältpunktsmaximum* eller — *minimum* och *omkristallisationer*, kunna vi säga att alla systemdiagram kunna tänkas bildade av de nu diskuterade trenne huvudtyperna var för sig eller i förening. Även delar av diagrammen kunna vara representerade, som t. ex. vid det ofta förekommande fallet: begränsad blandbarhet i det fasta tillståndet.

Diagrammens konstruktion.

Om ett ämne, t. ex. en metall, får *svalna* inom ett temperaturområde, varest inga som helst omvandlingar förekomma, så är avsvalningshastigheten i varje ögonblick proportionell mot skillnaden mellan metallens momentana temperatur och omgivningens eller den s. k. *konvergenstemperaturen*. Mätes temperaturen med jämna tidsintervall och avsättes gradtalet som ordinata och tiden som abscissa, erhålles en exponentialkurva *abb'* (fig. 5). Vid *upp-*

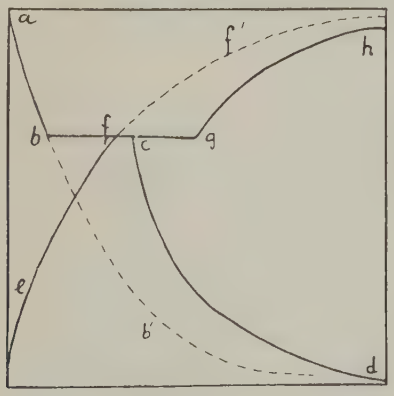


Fig. 5.

hettning under överensstämmande betingelser äro förhållandena naturligtvis fullt analoga och framställas av kurvan *eff'* (fig. 5).

Antag emellertid, att en annan metall inom samma temperaturområde övergår från fast till flytande form utan

kemiska förändringar och utan att sedan en omvandling (omkristallisation) äger rum i den fasta fasen, så förlöper avsvalningen i enlighet med kurvan *abcd* (fulldragen fig. 5). Stycket *ab* svarar då mot smältans avsvalning. I punkten *b* börjar utkristallisationen av metallen i fast form och fortsätter till punkten *c*. Temperaturen håller sig under hela denna tid konstant. Jämvikten inställer sig tydligen mellan 3 faser: fast, flytande och ånga

$$P+F=C+2$$

$$\therefore\ 3+n=1+2,\ \text{varav}\ n=0.$$

Därigenom att processen emellertid sker vid atmosfärtryck kan ångfasen, som förut nämnts, lämnas utan avseende. Vi få således en jämvikt, som egentligen är univariant, men som verkar nonvariant, emedan trycket fastslagits till en atmosfär.[1] Avsvalningen fortsätter sedan utefter kurvan *cd*. Temperaturfallet per tidsenhet, är här ett annat än på kurvan *bb'* svarande mot en avsvalning utan stelning. Avsvalningshastigheten utefter *cd* är större, emedan den fasta kroppen har mindre värmekapacitet (spec. värme) än smältan.

Under avkylningen kunna emellertid även andra omvandlingar inträda, i det att den stelnade massan kan omlagras i nya modifikationer. Mot varje sådan omkristallisation svarar ett hållpunktsintervall (liknande *bc*) på kurvan.

Uppvärmes samma metall, erhålles på upphettningskurvan motsvarande hållpunktsintervall *fg* på grund av omvandling och smältning. Temperaturen stiger sedan mutatis mutandis utefter *gh* men långsammare än utefter motsvarande kurva *ff'*, där ingen smältning äger rum.

Om ett tvåkomponentigt system, t. ex. en metallsmälta, utan föreningar eller fasta lösningar (jfr fig. 2 eller var

[1] Även smältpunkten är beroende — ehuru i allmänhet obetydligt — av trycket. Endast om smältan befinner sig under ämnets eget ångtryck vid smältpunkten kunna alla tre faserna: kristall, vätska, ånga, koexistera, d. v. s. systemet är nonvariant.

del för sig, fig. 3) får svalna erhålles avkylningskurvor av typ 1 (fig. 6).

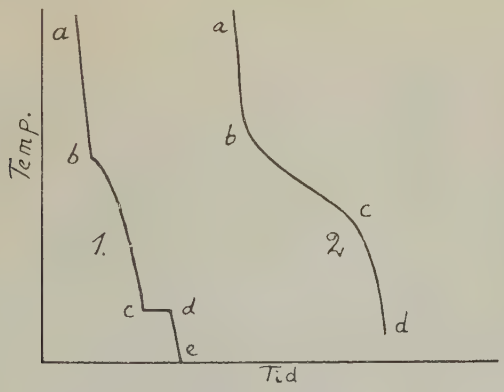


Fig. 6.

Stycket *ab* representerar den rena smältans avkylning. Vid *b* börjar utskiljandet av en av komponenterna i fast form. Därvid kommer systemet enligt föregående dock ej i fullständig jämvikt, och temperaturen blir icke konstant. Man erhåller således ingen verklig hållpunkt, utan ett fördröjningsintervall *bc* förorsakat av det vid utkristalliseringen frigjorda värmet. Vid *c* uppnås den eutektiska punkten, d. v. s. ännu en fas — den andra komponenten — uppträder. På grund härav blir temperaturen konstant utefter *cd* så länge något av smältan finns kvar. Sedan faller den åter utefter *de*.

Om åter blandkristaller kunna uppkomma vid stelningen, erhållas kurvor av typ 2 (fig. 6). Smältan svalnar som i förra fallet utefter *ab*. Vid *b* utskiljes de första spåren av fast lösning, och vid *c* stelnar alltsammans efter kristallisationsintervallet *bc*, svarande mot intervallet *ac*, fig. 4. Den fasta lösningen svalnar sedan vidare utefter *cd*.

*

Upptagningen av avkylningskurvor eller de vid legeringsanalys huvudsakligen endast i kontrollsyfte använda upphettningskurvorna framgår av fig. 7.

Fig. 7.

H är värmekällan — i detta fall en elektrisk motståndsugn av *Heræus*-typ.[1] I denna nedsättes det beskickade smältröret (ett löst sådant synes vid *R*), i vars centrum *Pt — PtRh* — termoelementet (*E*)[2] med tillhörande skyddsrör nedstickes. Termoströmmen ledes till ett par klämskruvar *K* av rumstemperatur. Därifrån ledes strömmen vidare till en direkt i temperaturgrader graderad millivoltmeter *V*. *S* är en väckarklocka omställd så, att den ger ett kort alarmslag var 10:nde sekund, då temperaturen noteras.

[1] Till höger vid *G* synes en gasugn enligt *Meker*. Båda gå upp till cirka 1100°. Vid undersökningar som erfordra höga temperaturer är en *Tammannugn* (tillverkas av *Ruhstraat* i Göttingen) den bästa upp till 1600°. Den kräver dock en tämligen dyr elektrisk installation.

[2] Detta »eichas» genom att neddoppa det isolerade lödstället i smältor av några rena metaller, t. ex. Sb, Ag, Au och notera gradtalet, som svarar mot de bekanta smältpunkterna.

De på detta sätt erhållna kurvorna förete ofta en del oregelbundenheter. Det är särskilt *en* avvikelse från den ideella typen, som här bör nämnas; de omnämnda hållpunkterna motsvaras ofta på kurvorna av ej fullt horisontella stycken. I stället för kurvdelen *bc* (fig. 5) eller *cd* (fig. 6: 1) erhålles en sluttande linje som t. ex. *bc* (fig. 6: 2). Utom på oregelbundenheter i värmetillförseln och bristande ledningsförmåga i försöksmassan, kan detta förhållande även ha sin grund i stelningsmekanismen själv. Vid kristalliseringen spela nämligen två viktiga faktorer: substansens s. k. *spontana kristallisationsförmåga* (*SK*) och dess *kristallisationshastighet* (*KG*) en viktig roll. Med *SK* menas antalet per tidsenhet bildade kristallisationskärnor, och *KG* betyder den hastighet med vilken kristallindividerna växa. Båda dessa egenskaper äro temperaturfunktioner. Hållpunktsintervallet på kurvan kommer därför att bli olika allt efter förhållandet mellan dessa individuella data vid temperaturen i fråga och avsvalnings- eller upphettningshastigheten. Om t. ex. avsvalningshastigheten är större än kristallisationshastigheten, så kan därigenom ett sluttande hållpunktsintervall erhållas å kurvan.

I det följande skola vi emellertid bortse från dessa oregelbundenheter och antaga att kurvorna ha den ideella formen.

Låt oss då undersöka ett system av två metaller A och B. Av de rena metallerna och deras blandningar i förhållandet: 80 % A + 20 % B, 60 % A + 40 % B, 40 % A + 60 % B och 20 % A + 80 % B uppvägas prov på vardera t. ex. 15 gr. Varje prov upphettas över smältpunkten, och då smältan blivit homogen, upptages en avkylningskurva. Dessa inläggas i ett tidstemperaturdiagram (fig. 8: 1), så att kurvornas första knickar $K_0 - K_{100}$ komma att ligga på inbördes horisontalavstånd, som äro proportionella mot smältornas koncentrationsskillnader. Beträffande knickarna blir således tidsaxeln även koncentrationsaxel. Genom att sammanbinda dessa knickar, vilka alltså för de rena komponenterna betyda stelningstemperaturer och verkliga håll-

punkter, och för blandningarna betyda det första utkristalliserandet av den komponent, som tjänstgör som lösningsmedel, således endast fördröjningsintervall, erhålles den vanliga smältkurvan *AEB* (jfr fig. 2). Smältdiagrammet uppritas sedan på sätt som framgår av fig. 8: 2. Knickarna E_{20} — E_{80} (fig. 8: 1) markera de eutektiska stelningarna. Varaktigheten av temperaturkonstansen är naturligtvis proportionell mot mängden utskilt eutektikum, under förutsättning, att vid avkylningen använts lika stora viktsmängder. Denna mängd når givetvis i detta fall sitt maximum vid sammansättningen 40 % A + 60 % B, där alltsammans stelnar till eutektikum (E_{60}). Till vänster om *E* är dess mängd proportionell mot smältans B-halt och till höger om *E* mot dess A-halt. De relativa mängderna av eutektikum brukar man inlägga i diagrammet som nedåtgående ordinator från den s. k. eutektiska linjen *CED* (fig. 8: 2). Därvid erhålles kurvan *CFD*, vilken tillåter att beräkna mängden eutektikum för vilken smälta som helst. Kännedomen härom kan vara av stor betydelse vid tolkningen av mera komplicerade diagram och är i vilket fall som helst alltid en värdefull kontroll vid studiet av mikroskoppreparaten.

Föreliggande diagram är lätt att tolka. Av vad som sagts i det föregående inses att metallerna äro fullständigt blandbara i flytande tillstånd och att de giva varken föreningar eller fasta lösningar. Detta är det enklast tänkbara fallet och representeras av sådana metallpar som t. ex. Au + Tl; Sb + Pb m. fl.

Som en viktig kontroll- och kompletteringsmetod ingår vid all termisk analys mikroskopisk undersökning av gjorda smältor. Dessa slipas därför, poleras och behandlas med ett för varje särskilt fall så avpassat etsningsmedel (HNO_3, $FeCl_3$ m. m.), att strukturen framträder så tydligt som möjligt. Diagrammet säger oss ungefär huru de olika proven böra te sig. De rena komponenterna framträda naturligtvis i mikroskopet som mer eller mindre väl begränsade kristaller utan inblandning av främmande beståndsdelar (fig. 9: 1 och 9: 2). (*B* antages vara den som mest angripes

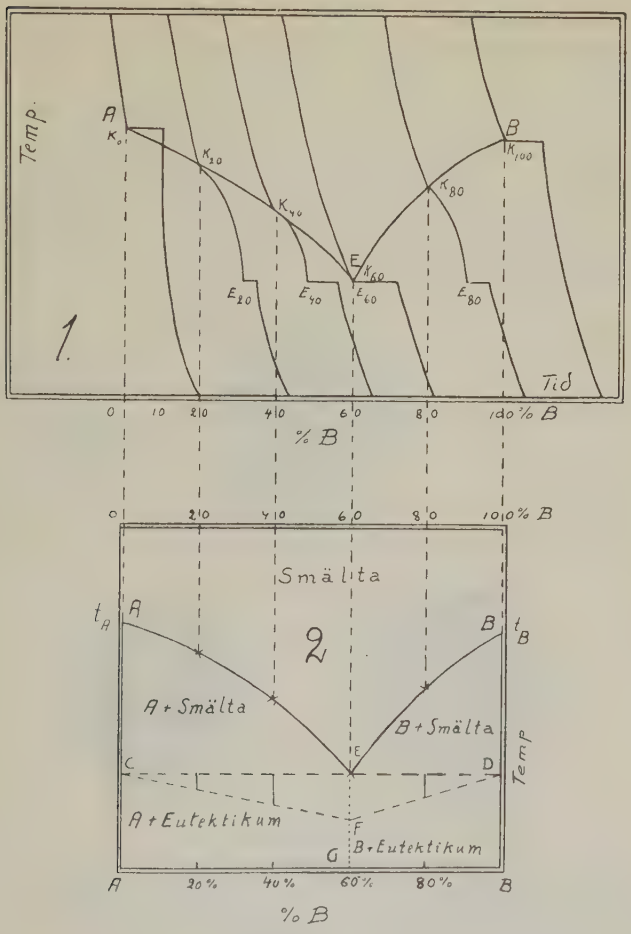


Fig. 8.

av etsningsmedlet och blir därför mörkare.) Den blandning — i detta fall 40 % A + 60 % B — som är sammansatt i de bestämda eutektiska proportionerna, företer naturligtvis den på grund av förloppet vid den eutektiska stelningsprocessen (successiv övermättning och utkristallisation) karaktäristiska lamellstrukturen (varvtals strimlor av A och B). Detta framgår av fig. 9: 3. Områdena *ACEG* och

BDEG i diagrammet innehålla legeringar, som äro sammansatta av rent A + eutektikum eller rent B + eutektikum respektive. Fig. 9: 4 visar utseendet av en legering bestående av 60 % A + 40 % B. De skarpkantade A-kristallerna visa, att de i enlighet med diagrammets utsago utskilts primärt. De omgivas därför av senare utkristalliserat eutektikum. I analogi härmed framgår av fig. 9: 5, att ur en smälta av sammansättningen 20 % A + 80 % B de rena B-kristallerna äro de som först utskiljas.

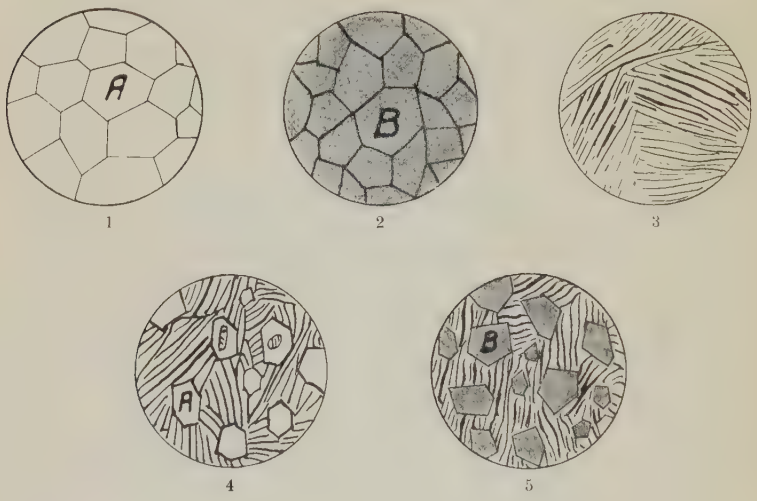


Fig. 9.

Det skulle föra för långt att ingå på betydelsen av dessa till en fullständig orientering inom de olika, ej alltför mångkomponentiga systemen förande metoder. Det må vara nog sagt, att man numera har helt och hållet i sin hand att så välja sammansättningen och temperaturbehandlingen av en blandning, att just de önskade egenskaperna erhållas hos den stelnade massan. De tekniska företag, som i första hand bygga härpå är metall- och betongindustrierna.

*

Litteratur i läroboksform om faslära och termisk analys.

Roozeboom: Die heterogenen Gleichgewichte I och II. *Vieweg*, Braunschweig 1901.
— Die Bedeutung der Phasenlehre. *Engelmann*, Leipzig 1900.
Findlay: Einführung in die Phasenlehre. *Barth*, Leipzig 1907.
Ruer: Metallographie in elementarer Darstellung. *Voss*, Leipzig 1907.
Dessau: Die physikalisch-chemischen Eigenschaften der Legierungen. *Vieweg*, Braunschweig 1910.
Tammann: Lehrbuch der Metallographie. *Voss*, Leipzig 1914.
Hanemann: Einführung in die Metallographie und Wärmebehandlung. *Borntträger*, Berlin 1915.
Reinglass: Chemische Technologie der Legierungen. *Spamer*, Leipzig 1919.

Örebro april 1921.

Kemiska notiser.

Av G. STARCK.

I.

Reaktionen mellan järn och vattenånga.

Denna reaktion, som i Molls lärobok i kemi anföres som exempel vid införandet av begreppen omvändbara reaktioner och kemisk jämvikt, är till sitt förlopp visserligen ej fullt klarlagd[1], men torde kunna skrivas

$$3Fe + 4H_2O \rightleftarrows Fe_3O_4 + 4H_2.$$

Ofta, kanske oftast, utföres försöket, enligt de experimentella handledningarnas föreskrift[2], så, att man leder vattenånga genom ett rör av svårsmält glas, porslin eller järn, fyllt med järnnubb och kraftigt upphettat. Glasröret är lätt utsatt för att spricka på grund av kondensvatten och vill också gärna mjukna och giva efter för det inre övertrycket på grund av den höga temperatur man vid detta sätt att utföra försöket måste använda. Det överträffas i detta hänseende av porslin eller järn, vilka åter igen hava olägenheten av ogenomskinlighet; en granskning av reaktionsprodukten blir under sådana omständigheter lätt uraktlåten, i det man anser vätgasbildningen vara bevis nog för järnets oxidation. Men framför allt är järnnubb olämplig, först och främst därför, att de vätgaskvantiteter man därmed erhåller bliva mycket obetydliga, och vidare därför, att de redan på förhand äro beklädda med ett lager av hammarslagg, som förhindrar iakttagelsen av en eventuell förändring. Genom användning av järn

[1] Jfr E. Mueller, Das Eisen und seine Verbindungen, 1919.
[2] T. ex. Heumann-Kühling.

i pulverform kan försöket göras mycket mer givande, både bokstavligt och teoretiskt.

Den anordning, jag har använt, är återgiven av fig. 1. Vattenångan utvecklas i en kolv försedd med rakt säkerhetsrör och kokstenar (små bitar av oglaserat porslin), vilka senare medgiva en jämförelsevis långsam kokning utan stötar. Vattenångan ledes genom ett mässingsrör *A*, 30 cm långt, 1 cm vitt, vars uppgift är att tjänstgöra som överhettare för vattenångan. *B* är ett svårsmält glasrör med avledningsrör, *C* ett porslinsskepp.

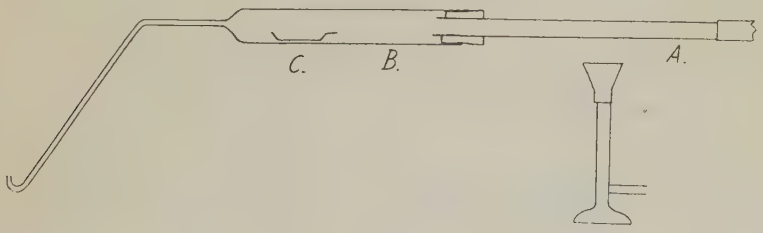


Fig. 1.

Försöket utföres på följande sätt. Skeppet beskickas med litet järnpulver (t. ex. ferrum reductum), varav 1 g ger cirka 350 cm^3 vätgas. Vattenånga ledes i ej alltför kraftig ström genom apparaten, överhettaren på förhand upphettad av en på mitten placerad brännare. Det är klokt att även på förhand, innan vattnet kommit i kokning, upphetta glasröret *B* för att minska den eljest oundvikliga kondensationen av vattenånga. Har genom försiktig uppvärmning *B* befriats från vattendroppar, så håller det sig sedan fullkomligt torrt och genomskinligt, och risken för att glaset spricker är förminskad så långt ske kan. Dessutom kan man med samma lätthet som i en vanlig ofärgad gasström iakttaga förändringen av skeppets innehåll. Detta är vinsten med överhettaren. Sedan luften utdrivits, upphettas skeppet, då en synnerligen livlig gasutveckling — i mina försök 30—40 cm^3 pr min. i genomsnitt, ungefär 75 cm^3 pr min. under mitten av försöket — vidtager.

Genom att utbyta glasröret *B* mot ett kulrör enl. fig. 2, fyllt med järnpulver, erhåller man en så kraftig vätgasström att gasen kan antändas. Först måste den dock befrias från huvudmängden vattenånga vilket sker i U-röret *D*, nedsatt i en bägare med vatten. Då det kondenserade vattnet hastigt skulle fylla U-rörets nedre del och tvinga gasen att bubbla fram, har jag för att få en stadigt brinnande låga smält fast vid U-röret en behållare för kondensvattnet såsom figuren visar. Med en smal spets av svårsmält glas i U-rörets mynning har jag erhållit en cirka 2 cm hög vätgaslåga.

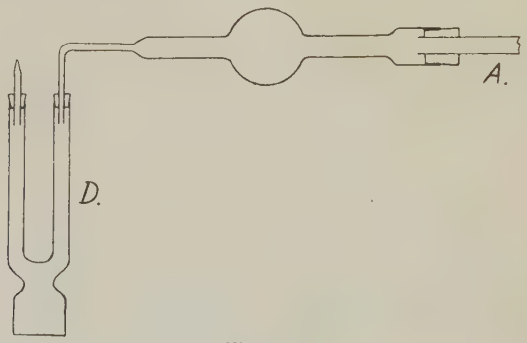


Fig. 2.

Det kan förtjäna framhållas, att redan en enkel undersökning av reaktionen $Fe_3O_4 + 4H_2 \rightarrow 3Fe + 4H_2O$ visar, att denna är omvändbar. Om man nämligen leder vätgas genom ett med järnoxid alldeles fyllt rör, så kommer vid upphettning, även om vätgasströmmen är ytterligt långsam, alltid en del av vätgasen att passera röret oförändrad, såsom man lätt visar. Ett sådant försök är ju endast en tillämpning av strömningsmetoden för analys av gasjämvikter. Gör man däremot motsvarande försök med kopparoxid, så kan man lätt uppnå, att varje spår av vätgasen även vid livlig gasström, fullständigt absorberas av oxiden, till bevis, att jämvikten här är fullständigt förskjuten åt ena sidan.

Den snabba och glatta reduktionen av vattenångan i

ovanstående kvalitativa försök förde mig på tanken att på denna väg bestämma vattnets viktsammansättning. Det lyckades också utmärkt. Skeppet med ferrum reductum vägdes före och efter försöket, vätgasen uppsamlades i en mätcylinder på 500 cm^3. Följande resultat erhölls:

Skeppet torrt	vägde	3,8350 g
» + järn	»	4,8702 »
» + järnoxid	»	5,1019 »
Viktsökning = syre	.....	0,2317 »

Vätgasvolymen 355 cm^3 fuktig gas av 18° och 765 mm (0°). Härav beräknas väte i vatten = 11,30 %; teor. värde 11,19 %, för ett skolförsök tillräckligt god överensstämmelse. Själva upphettningen av skeppet och utvecklingen av 355 cm^3 gas tog en tid av 10 min.

Försöket är lättare att utföra och tar mindre tid än den sedvanliga vattensyntesen genom reduktion av kopparoxid. Hela den vidlyftiga anordningen med omsorgsfullt torkad vätgas, klorkalciumrör o. s. v. bortfaller. Man har förloppet fullständigt i sin hand, så till vida som man avbryter reaktionen, när tillräckligt med vätgas utvecklats, genom att avbryta upphettningen av järnet och utdriva den kvarvarande vätgasen med vattenånga, vilket går på mindre än en minut. Som vattenångan är torr tack vare överhettaren, är även järnoxiden torr, blott man, sedan vätgasutvecklingen upphört, omedelbart tar ut skeppet att svalna i luften.

Jag vill därmed ej nödvändigtvis rekommendera denna metod att avlösa den historiska, som ju kan sägas ha åtminstone det företrädet, att man slipper reducera en gasvolym.

Reaktionen mellan järn och vatten är för närvarande tekniskt synnerligen viktig, i det de jättestora tyska fabrikerna för ammoniakframställning enligt Haber alstra sitt väte med hjälp därav.

II.

Framställning av karborundum som föreläsnings- eller lektionsförsök.

Av asbestpapp tillverkas en liten öppen ask med dimensionerna $5 \times 5 \times 10$ cm. I gavlarna upptagas något nedanför mitten ett hål passande till ett båglampkol, ungefär 8 mm vitt. Asbesten bestrykes med vattenglas, som dels tjänstgör som bindemedel, dels gör asken efter torkning fast och hård. I ena änden av 2 båglampkol borras axialt ett några mm djupt hål passande till grafitkärnan i en blyertspenna. Denna isolerar man ur en penna

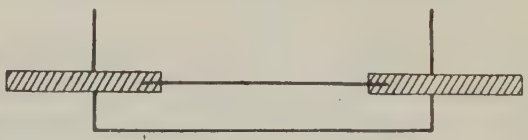


Fig. 3.

av medelhårdhet genom att lägga pennan i kokande vatten. Efter sammansättning har anordningen det utseende, som figuren utvisar, en ganska trogen kopia av en karborundumugn. Asken fylles nu med en blandning av ungefär 20 delar kokspulver, 25 delar fin sand, 1 del koksalt, varpå en ström av 6–8 amp. påsläppes. Grafitkärnan blir starkt glödande, och efter några minuter inträder det för karborundumugnen karakteristiska frambrytandet av koloxid, som man antänder. Efter en kvarts timme kan försöket avbrytas; i mitten av massan kan man då anträffa, visserligen inga tydligt avbildade karborundumkristaller, men dock korn eller klumpar, som genom den lätthet, varmed de repa glas ge sig till känna som detta ämne.

Kortare meddelanden, uppgifter m. m.

Bokanmälan.

Anér, Hjalmar, *Algebraisk formteori i förenklad gestalt.* A.-B. Svenska Teknologföreningens förlag, Stockholm 1921. Pris kr. 5: —.

Författarens arbete, som utmärker sig för en mångfald skarpsinniga slutsatser, är därvid ock kännetecknat av en lättfattlig framställning, vadan detsamma torde bliva en välkommen vägledning för alla, som önska raskt sätta sig in i dessa intressanta frågor.

Arbetet synes även bliva i hög grad förtjänt av fackmännens uppmärksamhet, då i och med detsamma den s. k. högre algebran blivit given en ny form — den »unära formteorien», — som medgiver större enkelhet än de s. k. binära formerna och härvid möjliggör en omedelbarare anslutning av ekvationernas yttre form och av deras av koefficienterna på mångahanda sätt sammansatta s. k. invarianter till ekvationernas inre struktur och invarianternas inre struktur, grundad på betraktelsen av ekvationens rötter och differenserna av rötterna två och två.

Författaren har bland annat förlänat den s. k. Hesseska determinanten en anmärkningsvärt förenklad unär form, som leder till begreppet av s. k. polvarianter och polinvarianter.

Sedan författaren härefter infört begreppet av subvarianter, skrider han på grund härav till en närmare diskussion av villkoren för algebraiska ekvationers lösbarhet med särskilt avseende på det ryktbara fallet av femtegradsekvationen, vars invarianter han härlett genom en

särskilt uppställd allmän metod för invarianternas verkliga framställning såsom funktioner av ekvationernas parametrar.

Stockholm i april 1921.

K. Bohlin,
professor.

Ett olyckstillbud med en projektionslampas förkopplingsmotstånd.

Med anledning av en eldsvåda till följd av ett elektriskt värmeelement här i Uppsala förra året ber undertecknad få relatera ett nog så allvarligt olyckstillbud med ett motstånd till en skioptikonlampa för några år sedan i Uppsala allm. läroverk. För dess biologiska lärosal hade jag omkr. 1908 inköpt en liten båglampa med tillhörande motstånd för omkr. 4 amp. och 220 volt. Motståndet var monterat i form av spiraler över asbestskivor, alltsammans insatt i en upptill och nedtill öppen plåttrumma, vars höjd var 23 cm och genomskärningsyta $16 \times 9\frac{1}{2}$ cm, således synnerligen små dimensioner. Motståndet var försett med rätt låga fötter. — Några år senare tillkallades jag av en av biologilärarne, såsom vanligt var, då han »inte fick ström» till sitt skioptikon. Denna gång konstaterade jag följande. Motståndet hade (av för mig obekant anledning) av biologen placerats i en cigarrlåda och överst försetts med ett metalltrådsnät med omkr. 1 millimeters maskor (för att hindra föremål att nedfalla i motståndet och skada det). Båda åtgärderna minskade betydligt kylningen av motståndet. Motståndet var invändigt delvis sönderbränt. Det hade brunnit i cigarrlådans kanter, så att lågan sotat väggen bredvid. Då motståndet stod på trägolv (en speciellt för skioptikonet byggd plattform) bredvid skioptikonbordet, också av trä, verkade denna upptäckt mycket oangenämt på mig. Säkerhetsproppen var smält, och *glimmerisoleringen i lampans kolhållare var överlagrad med ett ledande kollager.* Vid förfrågningar fick jag reda på, att en prov-

kandidat dagen förut skulle använda skioptikonet, men inte »fått ström», och därför lämnat det hela *utan att slå ifrån strömbrytaren.* Orsaken till att lampan ej lyste då var tydligen, att *strömmen gick förbi kolen* i lampan genom kolpulvret vid glimmerisoleringen. Så småningom blev motståndet överhettat genom ovan beskrivna olämpliga anordningar på detsamma. De vertikalt ställda strömspiralerna sjönko så småningom tillsammans, såsom de voro vid upptäckten, och säkerhetsproppen sattes i funktion i ett synnerligen kritiskt ögonblick, varpå lyckligtvis alltsammans slocknade. Möjligen kan hettan från den brinnande cigarrlådan, vars lågor ju delvis måste ha sugits in i motståndet, ha bidragit till spiralernas sammanfallande och den därpå följande smältningen av säkerhetsproppen. Det var omöjligt för mig att närmare fastställa tiden för olyckstillbudet, än sannolikt mellan provkandidatens lektion och den därpå följande dagens förmiddag. Skioptikonet hade nämligen använts rätt nyligen förut. Det är tydligt, att detta tillbud *kunde* ha blivit mycket olycksdigert, i synnerhet om det inträffat under natten, såsom ju möjligt är, att det gjort.

Med ovanstående fakta ber jag få göra mina kolleger fysici uppmärksamma på den fara, som alla slags experiment- och projektionsmotstånd innebära genom att de kunna stå under ström och eventuellt överhettas utan att säkerhetsapparaterna verka, och utan att en ovan lärare ser det. Senare har jag funnit precis samma isoleringsfel hos ytterligare en båglampa, i seminariets biologiska lärosal. Jag har effektivt avhjälpt det genom att insätta nya glimmerblad, som gå någon centimeter utanför metalldelarna, och jag skulle råda till att alltid göra så i skioptikonlampor, om isoleringen sitter *under* ljusbågen, där den är utsatt för nedfallande kolpartiklar med åtföljande överledning. Vidare böra alla motstånd vara fullt eldsäkert monterade, vilket tyvärr ej är fallet med en del, särskilt äldre typer, och så placerade, att någon fara ej kan uppstå, även om de skulle bli överhettade. Slutligen torde de rum, som ej användas av fysici, vara de farligaste, då någon allmänbildning på

detta område ju, sorgligt nog, icke existerar. Jag skulle t. o. m. tillråda, att fysikläraren event. i sällskap med en elektricitetsverkets representant ginge igenom läroverket och såge efter, att inga motstånd i välmening blivit så placerade eller så »skyddade», att fara för överhettning uppstår, *då de permanent*, t. ex. en halvtimme, *sättas under ström med full nätspänning* (således med lampans kol hopskruvade). I vanliga fall ha de ju en spänning, som är omkr. 50 volt lägre. Vidare böra sådana åtgärder vidtagas, att man aldrig kan oavsiktligt hindra kylningen genom att t. ex. placera något över motståndet. I den nya seminariebyggnaden här har jag med vederbörande lärares gillande placerat motståndet invid taket, där det ju är väl skyddat, och gjort det av s. k. värmegaller[1] för full nätspänning. Vi veta ju, hur »kortslutning» har blivit den trollformel, som alltid tillgripes, då man icke genast kan påvisa orsaken till en eldsvåda. Då vi dessutom veta, att dessa motstånd icke äro lika ofarliga som vanliga belysningsledningar, böra vi iakttaga all den försiktighet, som kan användas.

Magnus Lemoine.

*

Då man nu kan erhålla glödlampor speciellt konstruerade för skioptikon, får Redaktionen med anledning av ovanstående råda huvudlärare i fysik att tillse, att båglampor aldrig användas av icke sakkunniga. T. o. m. på en fysisk lärosal, där även relativt föga tränade fysiker undervisa, bör i regel glödlampa användas för skioptikon. En sådan lampa ger ett fullkomligt jämnt ljus och kräver ingen tillsyn samt tar mycket mindre ström än en båglampa för samma ljusstyrka.

Red:s anm.

[1] Jag har i min bostad haft 4 st. sådana »galler» under ström tillsammans omkr 5 000 timmar för uppvärmningsändamål utan att jag på någotdera kan se den allra ringaste skada eller förändring.

Frågor och svar.

I.

Fråga: En elev paastod at ha fundet en metode til 3-deling av en vilkaarlig vinkel. Fremgangsmaaten var følgende:

Lat $\angle BAC = \alpha$ være en given, spids vinkel. Paa det ene vinkelben AC vælges et vilkaarligt punkt D, derfra nedfældes $DF \perp$ det andet vinkelben AB, og $\angle ADE$ konstrueres $= 60°$. Derefter forlænges perpendikulæren FD til H, og $\angle HDE$ halveres. Paa denne halveringslinje avsættes $DG = DF$, og AG trækkes. Efter elevens paastand skulde da $\angle DAG (= \varphi)$ være $= \frac{\alpha}{3}$!

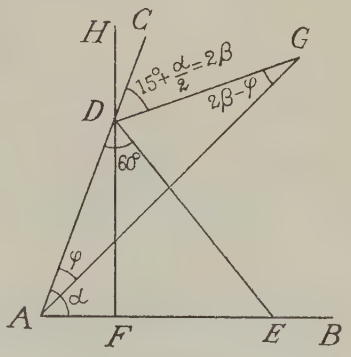


Fig. 1.

Vælger man nu forskjellige spidse vinkler, viser det sig, at φ blir omtrent $\frac{1}{3}\alpha$. Som regel faar jeg φ litt större end $\frac{\alpha}{3}$, men da man jo ikke paa den maate faar nogen begrundet mening om φ:s störrelse i fort hold til α, sökte jeg först ad elementær-geometrisk vei a-uttrykke φ ved α. Dette lykkedes ikke. Derefter valgte jeg $AD = 10$ og α henholdsvis $= 60°$, $45°$ og $30°$. Ved trigonometrisk beregning fandt jeg da φ henholdsvis $= 20° 47',8$, $15° 25'$ og $9° 53',8$.

Forskjellen fra $\frac{\alpha}{3}$ i disse specielle tilfælder viste sig altsaa ikke at være större end c:a $^3/_4°$, en divergens som vel kan forsvinde under en mindre nöiagtig konstruktion. For $\alpha = 30°$, blir φ forbausende nær $\frac{\alpha}{3}$. Merkelig er det ogsaa

at metoden ger nöiagtig resultat for $\alpha = 90°$, hvilket let indsees ved direkte betragtning av figuren.

Spörgsmaal.

a) Hvorfor er φ uavhængig av punktet D's avstand fra A?

b) Kan φ elementær-geometrisk uttrykkes som del av α? I motsat tilfælde hvorfor ikke?

c) Find det enklest mulige trigonometriske uttryk for φ ved hjælp av α.

d) Kan man paa elementær vei finde forskjellen mellem φ og $\frac{\alpha}{3}$? I saa fald vil man muligens kunde forklare, hvorfor φ, efter at ha git nöiagtig værdi for $\alpha = 90°$, avviker forholdsvis meget fra $\frac{\alpha}{3}$ for $\alpha = 60°$, avviker mindre for avtagende værdi av α, gir sandsynligvis nöiagtig værdi for $\alpha =$ c:a 30°, gir litt for liten værdi for $\alpha < 30°$, for saa igjen at gi rigtig værdi for $\alpha = 0°$. *Mauritz Hauge.*

Svar: *a*) Då ju DG är $= DF = DA \sin \alpha$, så kan endast figurens storlek, ej dess form, således ej vinklarna, vara beroende av storleken av AD.

b) och *c*). Genom sinusteoremet, tillämpat på $\triangle ADG$ fås, om AD sättes $= 1$ och således $DG = \sin \alpha$, samt

$$15 + \frac{\alpha}{2} = 2\beta$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} = \frac{\sin(2\beta - \varphi)}{1} = \frac{2 \sin \beta \cos(\beta - \varphi)}{1 + \sin \alpha} = \frac{2 \cos \beta \sin(\beta - \varphi)}{1 - \sin \alpha},$$

$$\because \quad \operatorname{tg}(\beta - \varphi) = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

När således denna trigonometriska ekvation gäller mellan φ och α, så kan ingen *algebraisk* relation förefinnas mellan dem.

d) En trigonometrisk ekvation för $\varphi - \frac{\alpha}{3}$ skulle bliva ganska invecklad och i varje fall vara föga upplysande, men enkelt kan sambandet framställas genom grafisk kon-

struktion ur följande tabell, vilken lätt fås ur ovanstående ekvation:

$\alpha =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\beta =$	7°,5	10°,0	12°,5	15°,0	17°,5	20°,0	22°,5	25°,0	27°,5	30°,0
$\varphi =$	0°	2°,92	6°,30	9°,90	13°,58	17°,24	20°,80	24°,17	27°,27	30°,00
$\varphi - \frac{\alpha}{3} =$	±0°	−0°,41	−0°,37	−0°,10	+0°,25	+0°,57	+0°,80	+0°,82	+0°,60	±0°

Genom denna tabell fås nu en god föreställning om kurvans allmänna form, och i fig. 2 hava vi uppritat kurvorna för φ och för $\frac{\alpha}{3}$ för att visa, hur nära de ansluta sig till varandra. Skalan utefter y-axeln har för tydlighets skull gjorts 3 gånger så stor som utefter x-axeln. I fig. 3 hava vi uppritat $\varphi - \frac{\alpha}{3}$, där y-axelns skala är 20 gånger x-axelns.

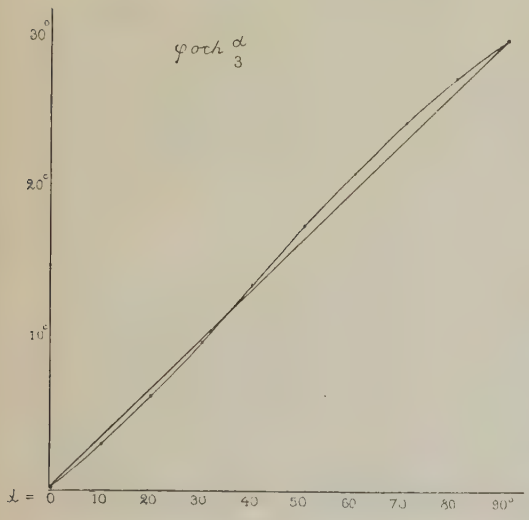


Fig. 2.

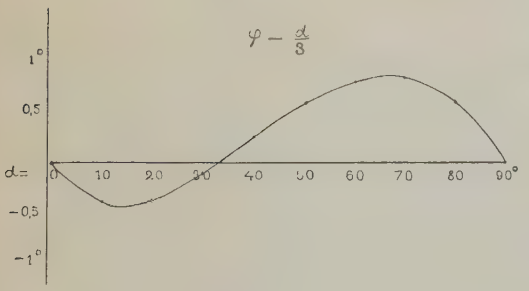


Fig. 3.

För att emellertid bättre se, var avvikningen är störst, och var den (praktiskt taget) är 0, göra vi tabellen tätare mellan 33° och 33°,5; mellan 65°,5 och 67° samt mellan 13° och 15°.

Vi finna då, att för $\alpha = 33°$ är $\varphi - \frac{\alpha}{3} =$

$= -0°0'10'',0$ samt för $\alpha = 33°10'$ är $\varphi - \frac{\alpha}{3} = +0°0'10'',7$.

För $\alpha = 33°5'$ är därför $\varphi - \frac{\alpha}{3}$ praktiskt taget $= 0$. Vidare är för $\alpha = 66°40'$, $66°50'$, $67°0'$

$$\varphi - \frac{\alpha}{3} = 0°50'54'',38,\ 0°50'54'',51,\ 0°50'54'',41.$$

Det mellersta av dessa är således (praktiskt taget) ett maximum. En största avvikning åt motsatt håll fås för α ungefär $= 14°$, då $\varphi - \frac{\alpha}{3}$ blir $= -0°\,26'\,00''$. Här är emellertid variationen så långsam, att man skulle behöva mycket stora tabeller för att med noggranhet bestämma det α-värde för vilket minimum antages. *M—r.*

*

II.

Fråga: Var ligger felet i följande bevis: Den ena av två lika cylindrar med volymen V är fylld med luft av trycket p, och den andra är tom. Cylindrarna kuna förenas genom ett med kran försett rör. Luften, som intagit rummet V, fyller efter kranens öppnande rummet $2V$. Enligt Joules kända försök ändras ej temperaturen, då ingen yttre värme tillföres. Både Boyles och Poissons lagar gälla således, och man har:

$$pV = p_1 \cdot 2V \text{ och } pV^\varkappa = p_1 \cdot (2V)^\varkappa. \quad \therefore\ 2 = 2^\varkappa. \qquad A.$$

Svar: Interpellanten har tillämpat Poissons lag endast därför att värme ej tillförts vid tillståndsförändringen. Denna lag gäller emellertid endast för kontinuerliga förändringar, då gasen vid volymförändringen uträttar arbete. Vid ovannämnda försök inträder diskontinuitet vid kranen, och i sin helhet uträttar gasen intet arbete. Poissons lag får således ej användas. *O. G—r.*

Matematiska uppgifter.

91) Produkten av 2 siffror och det av dem bildade 2-siffriga talet är ett flersiffrigt tal, innehållande endast en av de nämnda siffrorna såsom siffror. Sök dessa siffror.

(*C. H.*)

92) $\frac{15}{8}$ av ett fyrsiffrigt tal är kvadraten på det tal som bildas av de två sista siffrorna i halva talet. Sök talet.

93) Visa att $\lim_{n=\infty}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{4}\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{8}\right)\ldots\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2^n}\right)=x\cot x$.

94) Om a och b äro koordinaterna för en punkt P i planet, var skall P ligga för att uttrycket

$$y=\frac{x^2-6bx+4a}{4ax^2-6bx+1}$$

ej skall hava något maximum eller minimum?

95) $ABCD$ är en konvex fyrhörning, omskriven kring en cirkel O. Visa att $\left(\frac{OA}{OB}\right)^2=\frac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}$.

96) Två varandra skärande linjer och en punkt P i planet äro givna. Att genom P draga en linje, så att den bildade triangeln får given yta.

X.

Lösningar till uppgifterna i h. 2. 1920—21.

79) *Två räta linjer och en punkt O äro givna. En rörlig linje genom O skär de fasta linjerna i P och Q. För vilket läge av OP blir ytan av rektangeln $OP\cdot OQ$ minst?*

Kalla linjerna CA och CB och deras vinkel α. Låt perpendiklarna mot dem från O vara $OL=a$ och $OM=b$, och låt den sökta linjen göra vinkeln φ mot OL åt OM

räknat. Då är

$$OP \cdot OQ = \frac{a}{\cos\varphi} \cdot \frac{b}{\cos(\alpha - \varphi)}.$$

Vi skola således hava $y = \cos\varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi) = \max.$

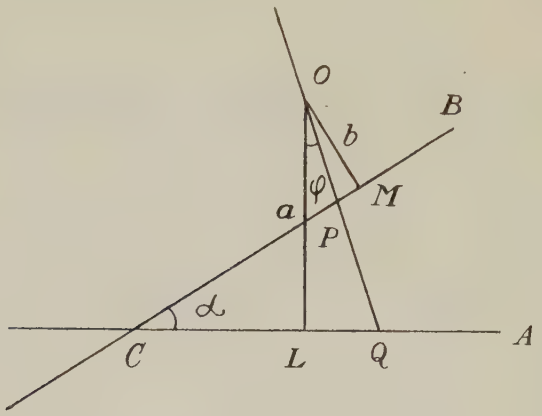


Fig. 1.

Då fås

$$\frac{dy}{d\varphi} = \cos\varphi \sin(\alpha - \varphi) - \sin\varphi \cos(\alpha - \varphi) = \sin(\alpha - 2\varphi)$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = -2\cos(\alpha - 2\varphi).$$

De möjliga värden, som göra $\frac{dy}{d\varphi} = 0$ äro således $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$. Alla andra giva samma linje som ett av dessa.

För $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ fås $\frac{d^2y}{d\varphi^2} = -2$ och $y = \cos^2\frac{\alpha}{2}$, för $\varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ fås $\frac{d^2y}{d\varphi^2} = +2$ och $y = -\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Såväl $\frac{\alpha}{2}$ som $\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ giva således, geometriskt taget, minima. Det förra ger en linje vinkelrät mot, det senare en som är parallell med α:s bissektris. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ eller $\alpha + \frac{\pi}{2}$ gör $OP \cdot OQ = \infty$.

(Löst av *O. A. L.*)

Vi hava till detta problem emottagit följande vackra generaliseringar.

I.

Man kan ersätta de räta linjerna med ett kägelsnitt och undersöka, när $OP \cdot OQ$ är extremum. Lösningen erhålles omedelbart med stöd av en hjälpsats, som i ett specialfall är bevisad i denna tidskr., årg. 1, sid. 194 och allmänt kan formuleras så:

Om man genom en punkt drager två kordor OPQ, $OP'Q'$ till ett kägelsnitt K, beror kvoten $\dfrac{OP \cdot OQ}{OP' \cdot OQ'}$ *endast av kordornas riktningar och riktningarna till kägelsnittets oändlighetspunkter (d. v. s. förhållandena mellan koefficienterna för andragradstermerna i K:s ekvation).*

Bevis: Låt O vara origo i ett rätvinkligt koordinatsystem och K:s ekvation hänförd till detta

$$(K): \quad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \quad F \neq 0.$$

Om OP har vinkelkoefficienten $k = \operatorname{tg} v$, kan man skriva koordinaterna för en punkt R på denna linje: $x = r\cos v$, $y = r \sin v$, där $r = OR$. r är positiv i riktningen $(0, 0) \longrightarrow (\cos v, \sin v)$. För att bestämma $OP = r_1$ och $OQ = r_2$ (om OP och OQ här uppfattas som riktade sträckor) har man ekv.

$$(A\cos^2 v+B\cos v \cdot \sin v+C\sin^2 v)\, r^2+(D\cos v+E\sin v)\, r+ \\ +F=0,$$

varav

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{F}{A\cos^2 v+B\cos v \sin v+C\sin^2 v}.$$

På samma sätt för $OP' = r_1'$, $OQ' = r_2'$, om $OP'Q'$ har vinkelkoeff. $\operatorname{tg} v'$:

$$r_1' \cdot r_2' = \frac{F}{A\cos^2 v'+B\cos v' \sin v'+C\sin^2 v'}$$

och

$$\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1' \cdot r_2'} = \frac{A\cos^2 v'+B\cos v' \sin v'+C\sin^2 v'}{A\cos^2 v+B\cos v \sin v+C\sin^2 v},$$

vilken likhet bevisar vår sats.[1] Man kan alltså studera variationen av $OP \cdot OQ$ lika väl för varje kägelsnitt (K_1):

$$A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,$$

där

$$\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1},$$

som för K (förutsatt att K' ej går genom O), ty, om OPQ skär (K_1) i P_1, Q_1 och $OP \cdot OQ$ är extremum, måste även $OP_1 \cdot OQ_1$ vara det och omvänt.

Jag kan t. ex. parallellförflytta $K(x=x'+p,\ y=y'+q)$ eller, vilket är detsamma, bibehålla K och förflytta O med tillhörande kordor (då erhålles ovan citerade specialfall av satsen), men jag kan samtidigt underkasta K en likformighetstransformation $(x=lx',\ y=ly')$ och jag kan, som sagt, dessutom förändra D, E, F godtyckligt, blott $F \neq 0$.

1:o) K en ellips. Om man tänker sig en med K likformig och lika belägen ellips K_1, som har sitt centrum i O, är $OP \cdot OQ$ extremum på samma gång som OP_1^2, där OP_1 är en halvdiameter. Ligger alltså O innanför K, i vilket fall alla linjer genom O skära K, blir $OP \cdot OQ$ *max.*[2] *för den korda, som är parallell med storaxeln och minimum för den, som är parallell med den mindre axeln.* Andra extrema finnas ej. Ligger åter O utanför K, utfylla de linjer genom O, som skära K en viss dubbelsektor i K_1. *Begränsningsstrålarna, d. v. s. tangenterna till K, äro alltid extrema. Dessutom finnas ett eller två extrema om endera eller bägge axlarna i* K_1 *skära* K,[3] vilket beror på O:s läge i förhållande till K:s topptangenter.

2:o) K en hyperbel. Man drager två linjer genom O K:s asymptoter och uppritar tvenne hyperbler, en i varje par vertikalvinklar, som ha dessa till asymptoter: K_1 och K_2, t. ex. dem, som äro kongruenta med K och dess

[1] En ändring $v \mid v+\pi$ ändrar ej kvotens värde, som alltså är funktion av $\operatorname{tg} v$ (och $\operatorname{tg} v'$).

[2] Nu tänkes »rektangeln» $OP \cdot OQ$ alltid positiv.

[3] Upptagas även sådana kordor till konkurrens, som ha imaginära skärningspunkter med K, bortfalla tangenterna som extrema.

konjugathyperbel. Det gäller då att söka extrema för diametrarna i dessa hyperbler. Ligger O inom K, så att alla kordriktningar äro företrädda, har $OP \cdot OQ$ *minima för de bägge kordor, som äro* | *K:s axlar, medan de bägge med asymptoterna parallella ge maxima* (∞). ($OP \cdot OQ$ uppfattas alltid positiv). Ligger åter O utanför K, utfylla de konkurrerande kordorna en dubbelsektor, och *tangenterna till K tillkomma som extrema. De bägge maxima, som motsvara de med asymptoterna parallella kordorna och det minimum, som motsvarar den med K:s transversalaxel parallella kordan förefinnas alltid.* Däremot finnes det min., som motsvarar den med K:s imaginära axel parallella kordan, endast om O ligger utanför eller på begränsningen av det band, som bildas av K:s reella topptangenter.

Består K av två skärande linjer, kan O anses ligga innanför detta degenererade kägelsnitt, och man får extrema för de linjer OP, som äro | med linjerna (maxima) och för dem, som äro med bissektriserna (minima).

3:o) Är slutligen K en parabel: $y^2 + Dx + Ey + F = O$, betraktar jag i stället de bägge parallella linjerna $y^2 - 1 = O$ (O tänkes i origo), och får, om O ligger innanför K *maximum för den korda, som är med axeln, och minimum för den däremot vinkelräta.* Ligger O utanför, *ge tangenterna extrema liksom den med axeln parallella kordan.* Den mot axeln vinkelräta ger minimum, om O ligger på samma sida om vertextangenten som K.

II.

Man kan generalisera problemet i en annan riktning. Antag allmänt en punkt O och tvenne kurvor C_P och C_Q givna. En rörlig linje genom O skär C_P i P och C_Q i Q. Man vill undersöka variationen hos rektangeln $OP \cdot OQ$. För den skull antaga vi vidare, att tvenne bågar kunna avgränsas på C_P och C_Q så, att varje linje genom O i en viss vinkelöppning skär dessa bågar i en och endast en punkt. Vi förutsätta dessutom för enkelhets skull, att kurvorna i varje punkt på dessa bågar ha en bestämd,

från punkt till punkt kontinuerligt varierande tangentriktning. Tangenterna kunna antagas överallt bilda ändliga vinklar med OPQ. Under dessa förutsättningar bevisar man lätt satsen: *$OP \cdot OQ$ kan icke vara extremum med mindre tangenterna i P och Q bilda lika vinklar åt var sitt håll med OPQ* (äro antiparallella med avseende på OPQ). I närheten av och på ömse sidor om en stråle OPQ, för vilken $OP \cdot OQ = m$ är t. ex. max., finnas nämligen tvänne strålar OP_1Q_1 och OP_2Q_2, för vilka $OP_1 \cdot OQ_1 = OP_2 \cdot OQ_2 = m - \varepsilon$, Där $\varepsilon > 0$ är tillräckligt litet. Genom P_1, P_2, Q_1, Q_2 kan en cirkel läggas. Då $\varepsilon \to 0$, tendera P_1 och P_2 mot P, liksom Q_1 och Q_2 mot Q. Cirkeln i fråga tangerar i limes C_P och C_Q i P, Q resp. Ur existensen av denna cirkel följer tydligen satsen. Skulle punkterna P och Q sammanfalla, reducerar sig limescirkeln till en punktcirkel. Emedan kordan P_1P_2 bildar samma vinkel med OP_2 som kordan OQ_2 med OQ_1, och dessa kordor övergå i tangenterna, då OP_2 och OQ_1 sammanfalla med OP, gäller emellertid satsen även i detta fall.

Ex. 1. *C_P och C_Q äro två varandra skärande räta linjer.* De linjer OPQ för vilka extremum kan ifrågakomma äro tydligen parallella med bissektriserna till vinklarna mellan C_P och C_Q. Man ser omedelbart, att $|OP \cdot OQ|$ är min. för bägge dessa lägen, då de med C_P och C_Q parallella linjerna ge oändligt stora rektanglar och $OP \cdot OQ$ däremellan varierar kontinuerligt.

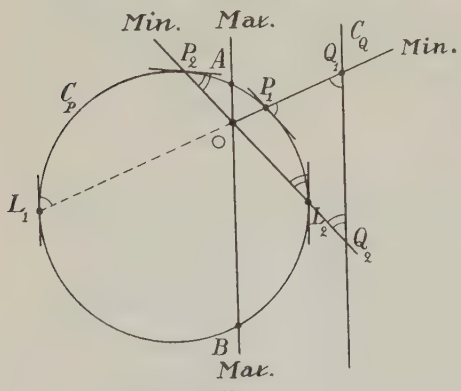


Fig. 2.

Ex. 2. *C_P en cirkel, C_Q en rät linje.* O en punkt inom cirkeln C_P. L_1, L_2 de punkter, i vilka tang. till $C_P \| C_Q$ (likställighetspunkterna), AOB C_Q (se fig. 2). $L_1OP_1Q_1$ ger min. på bågen AL_2B och P_2OQ_2 ger min. på bågen AL_1B.

Ligger O utanför C_P tillkomma nya extrema, emedan alla linjer genom O ej skära cirkeln.

Ligger O slutligen på C_P finnes i allmänhet endast minimivärdet 0 för $|OP \cdot OQ|$; detta erhålles för tangenten i O. Ligger O i L_1 eller L_2 är $OP \cdot OQ$ konstant.

Ex. 3. *C_P och C_Q cirklar.* Vi betrakta det intressantaste fallet, då O ligger innanför bägge cirklarna. Man kan, om man vill, antaga, att cirklarna ej råkas, då en godtycklig likformighetstransf. av den ena cirkeln med O som fixpunkt ej ändrar läget av de extremerande strålarna. Om OPQ ger extremum måste endera likställighetspunkten ligga på denna linje (fig. 3).

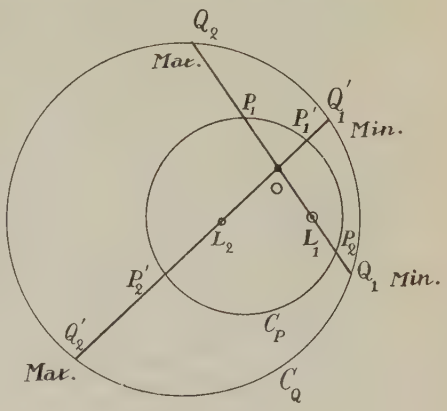


Fig. 3.

1:o) P och Q på var sin sida om O. Extrema erhållas, då POQ går genom L_1: $OP_1 \cdot OQ_1$ min. och $OP_2 \cdot OQ_2$ max.

2:o) P och Q på samma sida om O. Extrema erhållas då $OPQO$ går genom L_2: $OP_1' \cdot OQ_1'$ min. och $OP_2' \cdot OQ_2'$ max.

Faller O i L_1 (L_2) äro alla rektanglar av första (andra) slaget lika stora. *X.*

80) *Två raka, reguljära n-kantiga prismer med baskanterna a och a_1 hava lika volymer och lika totala ytor. a) Sök deras höjder. b) Sök förhållandet $\frac{a}{a^1}$ och största möjliga värde på n, om även summan av kanterna skall vara lika i båda.*

a) Kallas höjderna h och h_1 erhålles omedelbart systemet:

$$\begin{cases} nh\frac{a^2}{4}\cot\frac{\pi}{n} = nh_1\frac{a_1^2}{4}\cot\frac{\pi}{n} \\ nha + n\frac{a^2}{2}\cot\frac{\pi}{n} = nh_1a_1 + n\frac{a_1^2}{2}\cot\frac{\pi}{n} \end{cases}$$

eller
$$\begin{cases} ha^2 = h_1 a_1^2 \\ ha - h_1 a_1 = \dfrac{a_1^2 - a^2}{2} \cot \dfrac{\pi}{n} \end{cases}$$

varav
$$\frac{h}{a_1^2} = \frac{h_1}{a^2} = \frac{ha}{aa_1^2} = \frac{h_1 a_1}{a^2 a_1} = \frac{(a_1^2 - a^2)\cot\frac{\pi}{n}}{2aa_1(a_1 - a)} = \frac{a + a_1}{2aa_1}\cot\frac{\pi}{n}.$$

Således: $h = \dfrac{a_1(a+a_1)}{2a}\cot\dfrac{\pi}{n}$, $h_1 = \dfrac{a(a+a_1)}{2a_1}\cot\dfrac{\pi}{n}$.

b) Härtill kommer nu:
$$2na + nh = 2na_1 + nh_1$$

Således $2(a - a_1) = h_1 - h$, eller efter insättning av värdena på h och h_1
$$(a + a_1)^2 = 4aa_1 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

vilket ger:
$$a = a_1 \text{ eller } \frac{a}{a_1} = 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} - 1 \pm 2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} - 1}.$$

För att problemet skall giva reella värden fordras således att $n \leqq 4$. $n = 4$ ger dock blott $a = a_1$, vadan n måste vara $= 3$. I detta fall fås
$$\frac{a}{a_1} = 2\sqrt{3} - 1 \pm 2\sqrt{3 - \sqrt{3}} = \begin{cases} 4{,}716 \\ 0{,}2122 \end{cases}$$

vilka äro varandras invert. värden.

(Löst av *O. A. L.*)

81) *En likbent triangel och en punkt P äro givna. Att genom P draga en linje, så att det stycke därav, som faller mellan triangelns ben (eller deras förlängningar) halveras av basen (eller dess förlängning).*

ABC är den givna triangeln, $AB = AC$. *Q* och A äro diametralt motsatta punkter på den omskrivna cirkeln. Om då *ZXYP* (se fig. 4) är en lösning, så drag $ZU \parallel AC$.

Då är

$$CY=UZ=BZ, \quad QC=QB, \quad \angle QCY=QBZ=90°$$

$\therefore \triangle QCY \cong QBZ$ och $QY=QZ$. Då är $QX \perp ZY$.

Vi få således följande *konstruktion:*

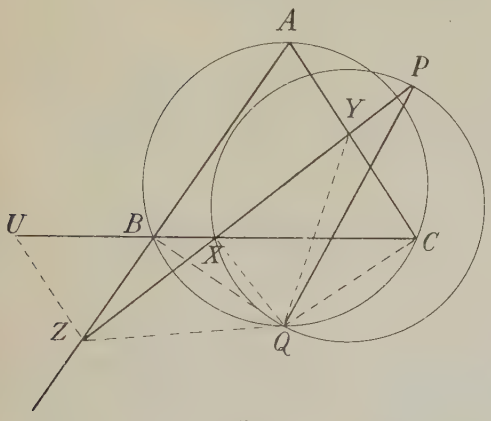


Fig. 4.

Upprita den kring ABC omskrivna cirkeln och drag diametern AQ. Upprita en cirkel med PQ som diameter och låt den skära BC i X (och X_1). $PYXZ$ är den sökta linjen.

Bevis: $QC=QB$, $\angle QCY=QBZ=90°$; men emedan även fyrhörningarna $CYXQ$ och $BXQZ$ äro inskrivbara, så är $\angle CQY=CXY=BXZ=BQZ$

$\therefore \triangle QCY \sim QBZ$, varav $QY=QZ$ och således $XY=XZ$.

För punkten X_1 föres beviset på samma sätt.

Anm. Enligt en bekant sats är en parabels vertextangent orten för fotpunkterna av normalen från brännpunkten mot tangenten. Därav följer, att linjerna PX och PX_1 äro tangenter till en parabel K, som har sin brännpunkt i Q vertextangenten BC. Även AB och AC äro tangenter till K. Ligger P utanför K erhållas två lösningar, ligger P på K, sammanfalla de, och ligger P innanför K erhålles ingen lösning.

Om t_1, t_2, t_3 äro tre fixa tangenter till en parabel och t en rörlig tangent, som skär de förra i T_1, T_2, T_3, så är förhållandet $\frac{T_1T_2}{T_2T_3}$ konstant för alla t. Ovanstående är ett specialfall av denna sats. *X.*

82) *Sök gränsvärdet för den oändliga produkten*

$$P = \cos\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} \ldots \cos\frac{\alpha}{2^n}.$$

Användes formeln $\cos\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2\sin\varphi}$, så fås

$$P = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{4}} \ldots \frac{\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin 2\alpha}{2^{n+1}\sin\frac{\alpha}{2^n}} =$$

$$= \sin 2\alpha : \left\{ 2\alpha \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}} \right\}, \text{ vilket i limes blir} = \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}.$$

(Löst av *X*.)

83) *Diskutera problemet: a kg vatten av t° blandas med b kg is av* $-t_1°$. *Isens smältningsvärme är* ω, *dess specifika värme är s. Sök blandningstemperaturen samt mängderna av is och vatten.*

Vattnets spec. värme $= r$.

Fall I. Blandningstemperaturen $= 0°$.

a) Mängderna is och vatten bli oförändrade.

Detta inträffar, om den värmemängd, som det givna vattnet avger, när dess temp. sjunker till 0° är lika med den, som åtgår för att höja den givna isens temp. till 0°.

Fall I *a*) inträffar således om $rat = sbt_1$.

b) Is smälter.

Detta inträffar, om den värmemängd, som det givna vattnet avger, när dess temp, sjunker till 0°, är större än den, som åtgår för att höja den givna isens temp. till 0°, men mindre än (eller lika med) den, som åtgår för att förvandla den givna isen till vatten av 0°.

Fall I *b*) inträffar således om $rat > sbt_1$

och $$rat \leqq sbt_1 + b\omega.$$

Så mycket is av noll grader smälter, att därför åtgår en värmemängd av $(rat - sbt_1)$ kgkal. Således smälter $\frac{rat - sbt_1}{\omega}$ kg is. Blandningen innehåller följaktligen

$$a + \frac{rat - sbt_1}{\omega} = \frac{a\omega + rat - sbt_1}{\omega} \text{ kg vatten}$$

och

$$b - \frac{rat - sbt_1}{\omega} = \frac{b\omega - (rat - sbt_1)}{\omega} \text{ kg is.}$$

Om $rat = sbt_1 + b\omega$, smälter all is.

c) Vatten fryser.

Detta inträffar, om den värmemängd, som behöver tillföras den givna isen för att dess temp. skall stiga till 0°, är större än den, som det givna vattnet avger, då dess temp. sjunker till 0°, men mindre än (eller lika med) den, som det givna vattnet avger, om det förvandlas till is av 0°.

Fall I *c*) inträffar således om $sbt_1 > rat$

och $$sbt_1 \leqq rat + a\omega .$$

Så mycket vatten av noll grader fryser, att den därvid avgivna värmemängden är $(sbt_1 - rat)$ kgkal. Således fryser $\frac{sbt_1 - rat}{\omega}$ kg vatten. Blandningen innehåller följaktligen

$$\frac{a\omega - (sbt_1 - rat)}{\omega} \text{ kg vatten}$$

och

$$\frac{b\omega + sbt_1 - rat}{\omega} \text{ kg is.}$$

Om $sbt_1 = rat + a\omega$, fryser allt vatten.

Fall II. Blandningstemperaturen $> 0°$.

Detta inträffar, om den värmemängd, som det givna vattnet avger, när dess temp. sjunker till 0°, är större än den, som åtgår för att överföra den givna isen till vatten av 0°.

Fall II inträffar således om

$$rat > sbt_1 + b\omega.$$

Blandningen erhåller den temperatur, som $(a+b)$ kg 0°-igt vatten får, om $[rat - (sbt_1 + b\omega)]$ kgkal. tillföras, d. v. s. blandningstemperaturen blir

$$\frac{rat - (sbt_1 + b\omega)}{r(a+b)} \text{ grader.}$$

Fall III. Blandningstemperaturen $< 0°$.

Detta inträffar, om den värmemängd, som behöver tillföras den givna isen för att dess temp. skall stiga till 0°, är större än den, som det givna vattnet avger, om det förvandlas till is av 0°.

Fall III inträffar således om

$$sbt_1 > rat + a\omega.$$

Blandningen erhåller den temperatur, som $(a+b)$ kg 0°-ig is får, om den fråntages $[sbt_1 - (rat + a\omega)]$ kgkal., d. v. s. blandningstemperaturen blir

$$\frac{sbt_1 - (rat + a\omega)}{s(a+b)} \text{ grader (under nollpunkten).}$$

O. A. L.

84) *En elektricitetsmaskin laddar genom att vridas 300 varv en kondensator av* $^1/_2$ *mikrofarads kapacitet till en potential av 20,000 volt. Med vilken hastighet skall den vridas för att dess effekt skall bliva 1 watt?*

Under laddningen avges

$$0{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^4 = 10^{-2} = \tfrac{1}{100} \text{ coulomb.}$$

I det ögonblick, då den stigit till Q coulomb, är potentialen

$$\frac{Q}{0{,}5 \cdot 10^{-6}} = 2Q \cdot 10^6 \text{ volt.}$$

Således är det arbete som avgives under 300 varv

$$W = \int_0^{0{,}01} 2 \cdot 10^6 Q dQ = 100 \text{ wattsekunder,}$$

och för att utföra 1 watt behöves $\frac{1 \cdot 300}{100} = 3$ omlopp pr sek.

Fjärde årgångens innehåll.

I. Uppsatser.

Sid.

BERGGREN, B. Demonstrationsförsök över luftens jonisering 47
—— Bestämning av ljusets våglängd med gitter 207
BJÖRNBERG, EMIL. Bidrag till läran om tals uppdelning i faktorer ... 133
BLIX, KARL. Rekurrenta serier 69
BODLUND, CARL. Är N primtal eller ej? 23
BOLINDER, G. Om fyrhörningar och deras inskrivbara bissektrisfyrhörningar. I. 193
BONNESEN, T. Om Geometriundervisning på Grundlag av Erfaring ... 1
FORSSTRÖM, GUST. Pendelstudium i första latinringen 38
GALLANDER, OTTO. Om vikt enbart som massbegrepp vid undervisningen i fysik 82
GRANQVIST, GUSTAV. Linjeblixten 104
HEDVALL, ARV. Om fasregeln och dess tillämpning vid termisk analys 209
HOLM, RAGNAR. Glödelektriska förstärkningsrör. II 204
KORÆN, TAGE. Några meteorologiens hjälpmedel vid studiet av de högre luftlagren 160
MEBIUS, C. A. Om utgångspunkten i Einsteins relativitetsteori 92
MEYER, AD. En ny metod för läran om krafters sammansättning 33
OSEEN, C. W. Om Einsteins speciella relativitetsteori 100
PALMØ, E. Regningsarters Gyldighetsområade 129
RAMSTEDT, EVA. Astons undersökningar över grundämnenas massspektra 176
RYDBERG, C. F. Om generalisering av problem 65
STARCK, G. Kemiska notiser I och II 230

II. Meddelanden, recensioner, uppgifter m. m.

Meddelanden:

Från fysiska sällskapet i Stockholm 127
Ett olyckstillbud med en projektionslampa (M. LEMOINE) 236
Institut de Mathematiques de l'Université de Strasbourg 51

Bokanmälningar: Sid.
K. FAJANS, Radioaktivität (J. ARV. HEDVALL) 50
E. S. JOHANSEN, Moderne anskuelser over Elektricitet og Stof (KURT MOLIN) 118
ANÉR, Algebraisk formteori (K. BOHLIN) 235

Polemik:
Ett slutord i diskussionen om linsformeln och dess härledning (GUST. FORSSTRÖM) 52
Några ord med anledning av prof. C. W. OSEENS uppsats om Einsteins speciella relativitetsteori 186

Frågor och svar 239
Prisuppgift för årg. 1920—21 60
Vår prisuppgift för årg. 1919—20. Pristagarens lösning 61
Matematiska och fysiska uppgifter 53, 120, 188, 243
Lösningar 54, 121, 189, 243
Meddelanden från Redaktionen 128
Brevlåda 128